

1. Dado el polinomio $P(x) = -13x^2 + 6x^3 + 8x - 3$, di cuál es su grado, su coeficiente líder o principal, y su término independiente.
2. Encuentra el valor numérico de $P(x) = -x^5 + 3x^4 - 2x^2 + 2$ para $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$ y $x = \frac{-2}{3}$.
3. Encuentra el valor numérico de $Q(x) = 3x^2 - 2x + 2$ para $x = 1 - \sqrt{2}$, $x = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ y $x = \frac{1}{2} - 2\sqrt{2}$.
4. Dado el polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$, calcula $P(7,5)$ y $P(-3)$ de dos formas diferentes.
5. Halla el valor numérico del polinomio $P(x) = x^6 + 4x^5 - 2x + 3$ para $x = -2$. ¿Es divisible $P(x)$ entre $x + 2$?
6. Halla m para que al dividir el polinomio $2x^4 + 9x^3 + 2x^2 - 6x + m$ entre $x + 4$, el resto sea igual a 12.
7. Halla el valor de m para que el polinomio $5x^4 + mx^2 + 2x - 3$ sea divisible por $x + 1$.
8. Encuentra k , el término independiente del polinomio $p(x) = x^2 - 9x + k$, sabiendo que $x = 3$ es una raíz del polinomio. ¿Tiene otra raíz?
9. Halla a y b para que el polinomio $x^3 - x^2 + ax + b$ sea divisible por $(x - 1)^2$.
10. Realiza las siguientes operaciones y simplifica el resultado:
a) $(-2x^3 - 5x^2 - x + 1) \cdot (2x^4 - 2x - 3)$; b) $(x^2 - 3x + 1)^2$; c) $(2x - 1)^3$; d) $(x^4 + x^2 + 1) \cdot (x^3 + x + 1)$
11. Calcula el cociente y el resto de la división $P(x) : Q(x)$ en los siguientes casos:
a) $P(x) = x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 7x + 2$; $Q(x) = x^2 + 2x - 2$
b) $P(x) = x^5 + x^3 - x^2 - 7x - 1$; $Q(x) = -x^2 - 3x + 1$
c) $P(x) = x^6 - 5x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 7x + 2$; $Q(x) = -x^3 - 2x^2 + 2x - 2$
12. Dados los polinomios $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 1$, $Q(x) = -3x^4 + x^3 + 7x^2 - x + 4$ y $R(x) = -2x^2 - x - 1$, realiza las siguientes operaciones:
a) $(P(x) + 2Q(x)) \cdot R(x)$; b) $P(x) \cdot R(x) + Q(x)$; c) $(3P(x) - 2Q(x)) \cdot R(x)$
13. Calcula el cociente y el resto de las divisiones siguientes utilizando la regla de Ruffini:
a) $(x^4 - x^2 - 1) : (x + 2)$; b) $(x^5 - x^3 - x) : (x - 2)$; c) $(x^3 + x^2 + x + 1) : (2x + 1)$; d) $(x^4 - 2x + 1) : (x - 1)$
e) $(x^4 + x^2 - 4) : (2x - 3)$; f) $(2x^3 + 5x^2 + 3) : (2x + 1)$; g) $(x^7 + x^2 - 1) : (x + 1)$
14. Escribir como producto de factores los siguientes polinomios y di cuales son sus raíces:
a) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3$; b) $6x^4 - 5x^3 - 23x^2 + 20x - 4$; c) $2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$; d) $x^5 - 16x$;
e) $x^3 - 2x^2 - x + 2$; f) $x^4 - 5x^2 + 4$; g) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$; h) $x^5 - 7x^4 + 10x^3 - x^2 + 7x - 10$;
i) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$; j) $4x^2 - 25$; k) $4x^2 + 4x + 1$; l) $x^5 - 2x^4 - 11x^3 + 4x^2 + 28x + 16$
15. Intenta factorizar el polinomio $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4$. Hazlo ahora sabiendo que es divisible por el polinomio $x^2 + x + 1$.
16. Intenta factorizar el polinomio $6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1$. Vuelve a intentarlo sabiendo que $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ son raíces suyas.
17. Escribe un polinomio cuyas raíces sean 1, 4, -4 y 0.
18. Escribe un polinomio de grado 4 que solo tenga por raíces 0 y 1.
19. Encuentra las raíces del polinomio $P(x) = x^6 - 4x^5 - 2x^4 + 20x^3 - 11x^2 - 16x + 12$

20. Resuelve las siguientes ecuaciones, factorizando previamente:

- a) $x^3 - 7x - 6 = 0$; b) $2x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = 0$; c) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$; d) $3x^3 - 10x^2 + 9x - 2 = 0$;
 e) $x^5 - 16x = 0$; f) $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$; g) $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$; h) $3x^5 + x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 2x = 0$;
 i) $\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{5}{2}x + 1 = 0$; j) $x^3 - \frac{7}{3}x^2 - \frac{70}{3}x + 8 = 0$; k) $(9x^2 - 1)(2x + 3)^2 = 0$; l) $(x - 1)^3(x^3 - 4x) = 0$

21. Halla, en cada uno de los siguientes casos, el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de $A(x)$ y $B(x)$, es decir, $\text{mcd}[A(x), B(x)]$, $\text{mcm}[A(x), B(x)]$:

- a) $A(x) = x^2 + x - 12$; $B(x) = x^3 - 9x$
 b) $A(x) = x^3 + x^2 - x - 1$; $B(x) = x^3 - x$
 c) $A(x) = x^6 - x^2$; $B(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

22. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

- a) $\frac{9 - x^2}{x^2 - 3x}$; b) $\frac{3x^3 - 2x^2 - 7x - 2}{x^3 - 4x}$; c) $\frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 2x^2}$; d) $\frac{x + 2}{x^3 - 3x + 2}$; e) $\frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 - 7x + 6}$; f) $\frac{x^4 - 16}{x^3 - 8}$

23. Reduce previamente a común denominador las fracciones algebraicas siguientes y súmalas:

$$\frac{x+7}{x} ; \frac{x-2}{x^2+x} ; -\frac{2x+1}{x+1}$$

24. Efectúa las siguientes operaciones con fracciones algebraicas y simplifica, si es posible, el resultado:

- a) $\frac{1}{x^2-1} + \frac{2x}{x+1} - \frac{x}{x-1}$; b) $\frac{x^2-2x-3}{x+5} \cdot \frac{2x+3}{x-3}$; c) $\frac{x^2-2x+3}{x-2} : \frac{2x+3}{x+5}$; d) $\frac{x+2}{x} : \left(\frac{x+1}{3} \cdot \frac{x}{2x+1}\right)$;
 e) $\frac{x^4-x^2}{x^2+1} \cdot \frac{x^4+x^2}{x^4}$; f) $\frac{3a+3}{12a-12} : \frac{(a+1)^2}{a^2-1}$; g) $\frac{x^2+2x-3}{(x-2)^3} \cdot \frac{(x-2)^2}{x^2-1}$; h) $\frac{x}{x-2} - \frac{x}{x-1} - \frac{x}{x^2-3x+2}$;
 i) $\left(\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+2}\right) : \left(1 + \frac{x}{x+2}\right)$; j) $\left(1 - \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{x+2}\right) : \frac{1}{x+2}$; k) $\left(\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x}{x+1}\right) : \frac{3x}{x-1}$; l) $\frac{\frac{10x-2}{3} - \frac{x^2-1}{2}}{\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1}}$

25. Resuelve la ecuación: $\frac{x-1}{x^2+2x} - \frac{2}{x^2-2x} - \frac{x}{x^2-4} = 0$

26. Demuestra que las siguientes igualdades son ciertas, es decir, que son identidades:

- a) $\left(\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1-x^2}\right) \left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{1}{x}$; b) $\frac{a^2-1}{a^2-3a+2} : \frac{a^2+2a+1}{a^2-a-2} = 1$; c) $\left(\frac{x-2}{x-3} - \frac{x-3}{x-2}\right) : \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) = 2x-5$

27. Determina a y b para que se cumpla cada una de las igualdades siguientes:

- a) $(x-a)(x-b) = x^2 + 3x + 8$; b) $x^2 - ax + b = (x+2)(x-3)$; c) $\frac{8x+9}{(x-2)(x+3)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3}$

28. Calcula m y n en el polinomio $x^2 + mx + n$ para que sea divisible por $x-2$ y por $x+5$.

29. Dado el polinomio $x^2 + kx + 8$, calcula k sabiendo que una raíz es doble que la otra. ¿Cuáles son las raíces?

30. Calcula a y b en el polinomio $P(x) = x^5 - 2x^4 - ax^3 + bx^2 + 13x + 6$, si sabemos que es divisible por el polinomio $Q(x) = x^2 - 5x + 6$.

Soluciones

1. Grado: 3. Coeficiente líder o principal: 6. Término independiente: -3 .
2. $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{53}{32}$, $P(2) = 10$, $P\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{446}{243}$.
3. $Q(1-\sqrt{2}) = 9-4\sqrt{2}$, $Q(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = 17-6\sqrt{6}-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$; $Q\left(\frac{1}{2}-2\sqrt{2}\right) = \frac{103}{4}-2\sqrt{2}$.
4. $P(a)$ se puede hallar sustituyendo directamente por $x = a$ o mirando el resto de dividir $P(x)$ entre $x - a$ (teorema del resto). En cualquier caso: $P(7,5) = 303,875$, $P(-3) = -40$.
5. $P(-2) = -57$. $P(x)$ no es divisible entre $x + 2$ porque $P(-2) \neq 0$ (teorema del resto).
6. $m = 20$.
7. $m = 0$.
8. $k = 18$. Sí, la otra raíz es $x = 6$.
9. $a = -1$, $b = 1$
10. a) $-4x^7 - 10x^6 - 2x^5 + 6x^4 + 16x^3 + 17x^2 + x - 3$; b) $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1$; c) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$; d) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 2$
11. a) Cociente: $x^2 - 7x + 14$, Resto: $-49x + 30$; b) Cociente: $-x^3 + 3x^2 - 11x + 37$, Resto: $115x - 38$
c) Cociente: $-x^3 + 2x^2 - x + 13$, Resto: $30x^2 - 35x + 28$
12. a) $12x^6 - 15x^4 - 22x^3 - 28x^2 - 12x - 7$; b) $-2x^5 + 6x^4 - 9x^3 + 7x^2 - 7x + 5$; c) $-12x^6 - 8x^5 + 51x^4 - 18x^3 + 28x^2 - 12x + 11$
13. a) Cociente: $x^3 - 2x^2 + 3x - 6$, Resto: 11 ; b) Cociente: $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x + 11$, Resto: 22 ; c) Cociente: $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}$, Resto: $\frac{5}{8}$; d) Cociente: $x^3 + x^2 + x - 1$, Resto: 0 ; e) Cociente: $\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{15}{16}$, Resto: $-\frac{19}{16}$; f) Cociente: $x^2 + 2x + 1$, Resto: 4 ; g) Cociente: $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2$, Resto: -1
14. a) Factorización: $x^3(x-2)^2(x-5)$, Raíces: 0 (triple), 2 (doble), 5 ; b) Factorización: $(x+2)(x-2)(2x-1)(3x-1) = 6(x+2)(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$, Raíces: -2 , 2 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$; c) Factorización: $(x-1)(x+2)(2x-5) = 2(x-1)(x+2)\left(x-\frac{5}{2}\right)$, Raíces: 1 , -2 , $\frac{5}{2}$; d) Factorización: $x(x+2)(x-2)(x^2+4)$, Raíces: 0 , -2 , 2 ; e) Factorización: $(x+1)(x-1)(x-2)$, Raíces: -1 , 1 , 2 ; f) Factorización: $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$, Raíces: -1 , 1 , -2 , 2 ; g) Factorización: $(x+1)(x-1)(x+3)^2(x^2+1)$, Raíces: -1 , 1 , -3 (doble); h) Factorización: $(x-1)(x-2)(x-5)(x^2+x+1)$, Raíces 1 , 2 , 5 ;

i) Factorización: $x(x+1)(x-1)(x-4)(x^2+x+2)$, Raíces: 0, -1, 1, 4 ;

j) Factorización: $(2x+5)(2x-5) = 4\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)$, Raíces: $-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}$;

k) Factorización: $(2x+1)^2 = 4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$, Raíces: $-\frac{1}{2}$ (doble) ;

l) Factorización: $(x+2)(x-2)(x-4)(x+1)^2$, Raíces: -2, 2, 4, -1 (doble).

15. $(x^2+x+1)(x^2+3x+4)$

16. $(2x+1)(3x-1)(x^2+x+1) = 6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x^2+x+1)$

17. $x^4 - x^3 - 16x^2 + 16x$

18. $x^4 - 2x^3 + x^2$

19. -1, 1 (doble), -2, 2, 3

20. a) -1, -2, 3 ; b) 1, -2, $\frac{5}{2}$; c) -1, 1, 2, 3 ; c) -1, 1, 2, 3 ; d) 1, 2, $\frac{1}{3}$; e) 0, -2, 2 ; f) 0, 1, 2 ;

g) 1 ; h) 0, 2, $-\frac{1}{3}$; i) -2, -1 ; j) -4, 6, $\frac{1}{3}$; k) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{3}{2}$; l) -2, 0, 1, 2

21. a) mcd: $x-3$, mcm: $x(x+3)(x-3)(x+4)$; b) mcd: $(x-1)(x+1)$, mcm: $x(x-1)(x+1)^2$;

c) mcd: $(x-1)(x^2+1)$, mcm: $x^2(x+1)(x-1)(x^2+1)$

22. a) $-\frac{x+3}{x}$; b) $\frac{3x^2+4x+1}{x^2+2x}$; c) $\frac{x-2}{x}$; d) $\frac{1}{x^2-2x+1}$; e) $\frac{x^3-4x^2+x+6}{x^2-7x+6}$; f) $\frac{x^3+2x^2+4x+8}{x^2+2x+4}$

23. $\frac{-x^2+8x+5}{x^2+x}$

24. a) $\frac{x^2-3x+1}{x^2-1}$; b) $\frac{2x^2+5x+3}{x+5}$; c) $\frac{x^3+3x^2-7x+15}{2x^2-x-6}$; d) $\frac{6x^2+15x+6}{x^3-x^2}$; e) x^2-1 ; f) $\frac{1}{4}$;

g) $\frac{x+3}{x^2-x-2}$; h) 0 ; i) $\frac{3x+2}{2x^2+2x}$; j) $\frac{1}{x+2}$; k) $\frac{1}{3x+3}$; l) 2

25. $-\frac{2}{5}$

26. En este ejercicio se trata de hacer comprobaciones. Por tanto, no es posible escribir la solución final sin dar respuesta completamente a cada uno de los apartados. Intenta hacerlos. Los corregiremos en clase.

27. a) No hay solución ; b) $a=1, b=-6$; c) $a=5, b=3$

28. $m=3, n=-10$

29. Hay dos posibles soluciones:

- Para $k=-6$ las raíces son 2 y 4
- Para $k=6$ las raíces son -2 y -4

30. $a=6, b=4$