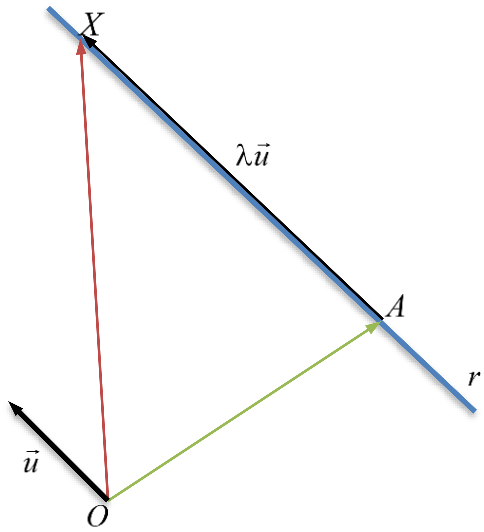
Ecuaciones de una recta

Ecuación vectorial de la recta

Una recta r queda determinada vectorialmente dando un punto A de la recta (lo que supone dar el vector de posición $\overrightarrow{OA}$), y dando un vector $\vec{u}$ paralelo a la recta (vector de dirección o **vector director** de la recta). De este modo tendremos que, dado un punto cualquiera X de la recta (ver figura de la derecha):



$$r \equiv \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{u} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

La ecuación anterior recibe el nombre de **ecuación vectorial** de la recta.

Ecuaciones paramétricas de la recta

Si en la ecuación vectorial se sustituyen los vectores por sus coordenadas tenemos: $(x,y)=(a_1,a_2)+\lambda(u_1,u_2)$. El segundo miembro lo podemos desarrollar y queda $(x,y)=(a_1+\lambda u_1, a_2+\lambda u_2)$. Expresando por separado cada variable la recta r la podemos expresar así:

$$r \equiv \begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 \end{cases}$$

que son las **ecuaciones paramétricas** de la recta. Obsérvese que (x,y) son las coordenadas de un punto cualquiera (genérico) de la recta, (a_1,a_2) son las coordenadas de un punto dado, concreto, de la recta, (u_1,u_2) son las coordenadas de un vector director de la recta (paralelo o con la misma dirección de la recta) y λ es un número real que recibe el nombre de **parámetro**. Para cada valor del parámetro se obtiene un punto (x,y) de la recta r.

Ecuación continua de la recta

Si en las ecuaciones paramétricas de la recta despejamos el parámetro λ tenemos:

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - a_1 = \lambda u_1 \\ y - a_2 = \lambda u_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-a_1}{u_1} = \lambda \\ \dfrac{y-a_2}{u_2} = \lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{x-a_1}{u_1} = \frac{y-a_2}{u_2}$$

Entonces también podemos escribir la recta del siguiente modo, conocida como **ecuación continua** de la recta:

$$r \equiv \frac{x-a_1}{u_1} = \frac{y-a_2}{u_2}$$

Ecuación explícita de la recta. Pendiente de una recta

Si en la ecuación en forma continua despejamos la letra y se obtiene una ecuación de la siguiente forma:

$$r \equiv y = mx + n$$

Esta ecuación se conoce con el nombre de **ecuación explícita** o **ecuación afín** de la recta. Al número m que va multiplicando a la variable x se le llama **pendiente** de la recta. Al número n se le llama **ordenada en el origen**.

Ecuación implícita o general de la recta

Si en la ecuación continua eliminamos denominadores y pasamos todo al primer miembro aparece la **ecuación implícita o general** de la recta:

$$Ax + By + C = 0$$

Ejemplos, ecuación punto-pendiente y haz de rectas

Una recta viene completamente determinada o bien por un punto y un vector director, o bien por dos puntos.

Ejemplo 1

La ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $A(-3,2)$ y tiene por vector director $\vec{u}=(-1,4)$ es:

$$(x,y)=(-3,2)+\lambda(-1,4)$$

De aquí es fácil obtener, respectivamente, las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de la recta:

Paramétricas: $\begin{cases} x=-3-\lambda \\ y=2+4\lambda \end{cases}$. Continua: $\dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y-2}{4}$

Si eliminamos los denominadores de la ecuación continua y pasamos todo al primer miembro obtenemos la ecuación implícita de la recta:

$$4(x+3)=-1(y-2)\Rightarrow 4x+12=-y+2\Rightarrow 4x+y+10=0$$

Si en la última ecuación despejamos y obtenemos la ecuación explícita de la recta:

$$y=-4x-10$$

Ejemplo 2

Para hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos $A(5,-1)$ y $B(-2,-4)$ se halla primero el vector que une los dos puntos anteriores. Este vector es un vector director de la recta:

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-2,-4)-(5,-1)=(-7,-3)$$

Usando cualquiera de los dos puntos dados al principio, A o B, y el vector director anterior, se obtiene la ecuación vectorial de la recta pedida:

$$(x,y)=(5,-1)+\lambda(-7,-3)$$

A partir de aquí hallar el resto de ecuaciones de la recta es sencillo procediendo como en el ejemplo anterior.

Ecuación punto-pendiente de la recta

Sabemos que la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $A(a_1,a_2)$ y tiene vector director $\vec{u}=(u_1,u_2)$, es $\dfrac{x-a_1}{u_1}=\dfrac{y-a_2}{u_2}$. Esta ecuación la podemos escribir también del siguiente modo: $y-a_2=\dfrac{u_2}{u_1}(x-a_1)$. Si llamamos $m=\dfrac{u_2}{u_1}$, la ecuación anterior recibe el nombre de **ecuación punto-pendiente** y la podemos escribir así:

$$y-a_2=m(x-a_1)$$

Haz de rectas

Al conjunto de todas las rectas que pasan por un punto P se le llama haz de rectas de centro P. La expresión analítica del haz de rectas con centro $P(x_0,y_0)$ es:

$$\lambda(x-x_0)+\mu(y-y_0)=0$$

Por ejemplo, el haz de rectas que pasa por el punto $P(1,-1)$ es $\lambda(x-1)+\mu(y+1)=0$. Si quisiéramos, de entre todas ellas, saber la que pasa por el punto $Q(-3,2)$, se sustituye x por -3 e y por 2:

$$\lambda(-3-1)+\mu(2+1)=0\Rightarrow -4\lambda+3\mu=0$$

Una pareja que cumple la relación anterior es $\lambda=3$, $\mu=4$, luego la recta del haz de rectas que pasa por Q es:

$$3(x-1)+4(y+1)=0\Rightarrow 3x-3+4y+4=0\Rightarrow 3x+4y+1=0$$

Paralelismo y perpendicularidad

Dada una recta r en forma implícita o general, $r \equiv Ax+By+C=0$, para expresarla en forma explícita lo que hacemos es despejar la variable y:

$$Ax+By+C=0 \Rightarrow -By=Ax+C \Rightarrow y=\frac{A}{-B}x+\frac{C}{-B}$$

La pendiente de la recta anterior es $m=\frac{A}{-B}$. Habíamos visto en la sección anterior que la pendiente también es $m=\frac{u_2}{u_1}$, donde $\vec{u}=(u_1,u_2)$ es un vector director de la recta. Igualando ambas expresiones de la pendiente tenemos: $\frac{u_2}{u_1}=\frac{A}{-B} \Rightarrow \begin{cases} u_1=-B \\ u_2=A \end{cases}$. Por tanto, solamente con ver una recta en forma general: $Ax+By+C=0$, podremos saber también un vector director suyo: $\vec{u}=(-B,A)$. Este vector tendrá, por tanto, la misma dirección o será paralelo a la recta r. Por tanto, un vector perpendicular o normal a la recta r será el vector $\vec{v}=(A,B)$ (obsérvese que el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es igual a cero: $\vec{u}\cdot\vec{v}=(-B,A)\cdot(A,B)=-BA+AB=0$).

Si la recta está dada en forma vectorial, paramétrica o continua es muy fácil hallar un vector director suyo (se deduce rápidamente de las propias ecuaciones de la recta). En general, dado un vector $\vec{u}=(u_1,u_2)$, un vector $\vec{v}$ perpendicular a $\vec{u}$ ($\vec{u}\perp\vec{v}$) es de la forma $\vec{v}=(-u_2,u_1)$.

Ejemplo 3

Supongamos que queremos hallar las ecuaciones implícitas o generales de dos rectas que pasen por el punto $P(2,-1)$ y que sean, respectivamente, paralela y perpendicular a la recta $r\equiv -x+4y-1=0$.

En este caso es claro que $A=-1$ y $B=4$. Por tanto, un vector director de la recta r será $\vec{u}=(-4,-1)$. La ecuación continua de la recta será $\frac{x-2}{-4}=\frac{y-(-1)}{-1} \Rightarrow \frac{x-2}{-4}=\frac{y+1}{-1}$. Multiplicando en cruz y pasando al primer miembro se obtiene: $-1(x-2)=-4(y+1) \Rightarrow -x+2=-4y-4 \Rightarrow -x+4y+6=0$, que es la ecuación de la recta paralela a r que pasa por el punto $P(2,-1)$. Obsérvese que también podríamos haberlo hecho del siguiente modo: como la recta que buscamos es paralela a r no le queda más remedio que ser de la forma $-x+4y+C=0$; y como pasa por el punto $P(2,-1)$ tenemos, sustituyendo: $-2+4\cdot(-1)+C=0 \Rightarrow -2-4+C=0 \Rightarrow C=6$, con lo que la recta que buscamos es $-x+4y+6=0$. Si quisiéramos la ecuación explícita o afín de la recta, bastaría despejar variable y: $-x+4y+6=0 \Rightarrow 4y=x-6 \Rightarrow y=\frac{1}{4}x-\frac{6}{4} \Rightarrow y=\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}$. Observa que la pendiente es $m=\frac{1}{4}$, la cual cumple la relación $m=\frac{u_2}{u_1}$, ya que $\frac{u_2}{u_1}=\frac{-1}{-4}=\frac{1}{4}$.

Para hallar la recta perpendicular tomamos como vector director un vector perpendicular $\vec{v}=(A,B) \Rightarrow \vec{v}=(-1,4)$. Por tanto, la forma continua de la recta perpendicular a r que pasa por el punto $P(2,-1)$ es $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{4}$. Eliminando denominadores y pasando al primer miembro obtenemos la forma general o implícita:

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{4} \Rightarrow 4(x-2)=-1(y+1) \Rightarrow 4x-8=-y-1 \Rightarrow 4x+y-7=0$$

De nuevo, la forma explícita o afín se obtiene despejando y:

$$4x+y-7=0 \Rightarrow y=-4x+7$$

Posiciones relativas de dos rectas

Dos rectas en el plano pueden adoptar tres posiciones relativas: pueden cortarse en un punto común (**rectas secantes**), pueden no tener ningún punto en común (**rectas paralelas**) o pueden tener infinitos puntos en común (**rectas coincidentes**).

Dadas dos rectas r y s de vectores directores $\vec{u}=(u_1,u_2)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2)$, respectivamente, es fácil darse cuenta de que ambas rectas serán paralelas o coincidentes cuando los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean proporcionales, es decir, cuando

$$\vec{u}=k\cdot\vec{v}\Rightarrow(u_1,u_2)=(kv_1,kv_2)\Rightarrow\begin{cases}u_1=kv_1\\u_2=kv_2\end{cases}\text{, con } k\in\mathbb{R},\ k\neq 0$$

Por cierto, si $\vec{u}$ es proporcional a $\vec{v}$, $\vec{v}$ será proporcional a $\vec{u}$, ya que: $\vec{u}=k\cdot\vec{v}\Rightarrow\vec{v}=\frac{1}{k}\cdot\vec{u}$ ($k\neq 0$).

Distinguir el paralelismo de la coincidencia no es difícil ya que, si las rectas son paralelas, cualquier punto de una de ellas, nunca pertenecerá a la otra.

Si los vectores directores no son proporcionales, las rectas serán secantes. El punto de corte se puede hallar con facilidad resolviendo el sistema formado por las ecuaciones generales de ambas rectas. Veamos un par de ejemplos.

Ejemplo 4

Supongamos que tenemos las rectas $r\equiv -2x+3y-1=0$ y $s\equiv 4x-6y+5=0$. Sus vectores directores son, respectivamente, $\vec{u}=(-3,-2)$ y $\vec{v}=(6,4)$, que son proporcionales pues claramente $\vec{v}=-2\vec{u}$. Así pues, las rectas han de ser paralelas o coincidentes. Un punto de r se obtiene dando valor a una de las variables y despejando la otra. Por ejemplo, si $y=3$ tenemos $-2x+9-1=0\Rightarrow -2x+8=0\Rightarrow -2x=-8\Rightarrow x=4$. Así pues, un punto de la recta r es $P(4,3)$. Pero $P\notin s$ ya que al sustituir en la ecuación de s: $4\cdot 4-6\cdot 3+5=16-18+5=3\neq 0$. Por tanto, las rectas r y s son paralelas.

Desde luego, podríamos haber resuelto el sistema formado por r y s: $\begin{cases}-2x+3y-1=0\\4x-6y+5=0\end{cases}$. Multiplicando la primera ecuación por 2 tenemos: $\begin{cases}-4x+6y-2=0\\4x-6y+5=0\end{cases}$. Ahora, sumando ambas: $3=0$, que es una contradicción. Luego el sistema no tiene solución. Esto quiere decir que las rectas r y s son paralelas.

Ejemplo 5

Calculemos ahora la posición relativa de las rectas $r\equiv 2x-3y-1=0$; $s\equiv\begin{cases}x=-t+1\\y=4t-5\end{cases}$.

Un vector director de la recta r es $\vec{u}=(3,2)$ y un vector director de s es $\vec{v}=(-1,4)$. Como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales, las rectas r y s son secantes. Para hallar el punto de corte procederemos de dos forma distintas.

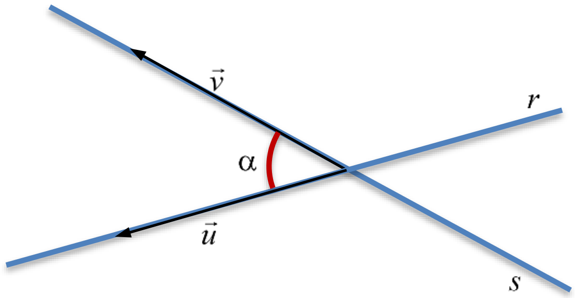
En la primera, y puesto que la recta s viene dada en paramétricas, sustituimos los valores de x y de y en la ecuación de la recta r: $2(-t+1)-3(4t-5)-1=0\Rightarrow -2t+2-12t+15-1=0\Rightarrow -14t=-16\Rightarrow t=\frac{16}{14}=\frac{8}{7}$. Sustituyendo ahora el valor de t en las ecuaciones paramétricas de s obtenemos el punto de corte: $\begin{cases}x=-\frac{8}{7}+1\\y=4\cdot\frac{8}{7}-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{7}\\y=-\frac{3}{7}\end{cases}$.

Así, el punto de corte de ambas rectas es $A\left(-\frac{1}{7},-\frac{3}{7}\right)$. Escribiremos a menudo este hecho así: $r\cap s=A$.

La segunda forma consiste en pasar las ecuaciones paramétricas de s a la forma general y resolver el sistema formado por r y s, tal y como hemos hecho en el ejemplo anterior. Puedes comprobar que la solución es la misma que antes.

Ángulo de dos rectas

Consideraremos que el **ángulo de dos rectas** en el plano es el menor de los ángulos que forman al cortarse (ver figura de la derecha). Si las rectas son paralelas o coincidentes su ángulo es 0º. Si suponemos dos rectas r y s, de vectores directores respectivos, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, sabemos por la unidad anterior que $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha$, donde α es el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y también, naturalmente, las rectas r y s. Despejando $\cos\alpha$ de la expresión anterior:



$$\cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

En el denominador hemos tomado el valor absoluto para que el ángulo α sea agudo.

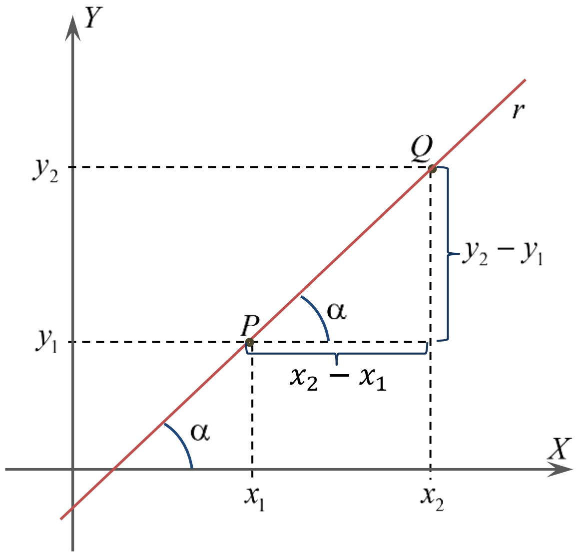
Ejemplo 6

Para calcular el ángulo que forman las rectas $r\equiv 2x-3y-1=0$ y $s\equiv\begin{cases}x=-t+1\\ y=4t-5\end{cases}$ del ejemplo anterior, hacemos lo siguiente: $\cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{|(3,2)\cdot(-1,4)|}{|(3,2)||(-1,4)|}=\frac{|3\cdot(-1)+2\cdot 4|}{\sqrt{3^2+2^2}\sqrt{(-1)^2+4^2}}=\frac{5}{\sqrt{13}\sqrt{17}}\cong 0{,}336$. Por tanto, el ángulo de las rectas r y s será: $\alpha=\arccos 0{,}336\cong 70{,}35^{\circ}$.

No es nada difícil darse cuenta de que el ángulo formado por los vectores directores es el mismo que el formado por los vectores normales de cada una de las dos rectas. Por tanto, en la fórmula anterior también podríamos escribir los vectores normales en lugar de los vectores directores y también obtendríamos el coseno del ángulo formado por las rectas r y s.

Pendiente y ángulo de dos rectas

Toda recta r forma un ángulo agudo con el eje X al representarla en unos ejes de coordenadas. Si $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$ son dos puntos de la recta r, un vector director suyo es $\overrightarrow{PQ}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$. Claramente, tal y como se aprecia en la figura de la derecha, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Tal y como ya habíamos visto en un apartado anterior, la pendiente m de la recta r es $m=\frac{u_2}{u_1}$, donde $\vec{u}=(u_1,u_2)$ es un vector director de la recta. Por tanto, deducimos que la pendiente de una recta es igual a la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con el eje X: $m=\operatorname{tg}\alpha$.



Es posible demostrar también que si α es el ángulo que forman dos rectas r y s, se cumple la siguiente relación: $tg\alpha=\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\right|$, donde m_1 es la pendiente de la recta r y m_2 es la pendiente de la recta s.

Así por ejemplo, si $r\equiv y=5x-1$ y $s\equiv y=4x+3$, son las ecuaciones explícitas de dos rectas, tenemos que $m_1=5$ y $m_2=4$. Por tanto, $\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{4-5}{1+4\cdot 5}\right|=\left|\frac{-1}{21}\right|=\frac{1}{21}$, y de aquí se deduce que el ángulo α formado por las rectas r y s es $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{21}\cong 2{,}73^{\circ}$.

Distancias

Distancia entre dos puntos

La **distancia entre dos puntos** $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$, que denotaremos $d(P,Q)$, es el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$ (esto se aprecia claramente también en la figura anterior). Es decir:

$$d(P,Q)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Por ejemplo, la distancia entre los puntos $P(3,6)$ y $Q(-2,4)$ es:

$$d(P,Q)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{(-2-3)^2+(4-6)^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}\cong 5{,}385$$

Distancia de un punto a una recta

La **distancia de un punto** $P(a,b)$ **a una recta** $r\equiv Ax+By+C=0$ es la mínima distancia entre P y r. La distancia entre P y r la denotaremos simbólicamente así: $d(P,r)$. Para calcularla podemos hallar la recta s, perpendicular a r, que pasa por el punto P. Esta recta s cortará a la recta r en un punto M. Pues bien, la distancia de P a r será igual a la distancia de P a M: $d(P,r)=d(P,M)$.

Ejemplo 7

Para calcular la distancia del punto $P(-6,-3)$ a la recta $r\equiv 3x-4y+9=0$, hallamos previamente la recta s, perpendicular a r, que pasa por P. Sabemos que un vector perpendicular o normal a la recta r es $\vec{v}=(3,-4)$. Luego la recta s será: $s\equiv\dfrac{x+6}{3}=\dfrac{y+3}{-4}$. Si pasamos de la forma continua a la forma general o implícita tenemos: $-4(x+6)=3(y+3)\Rightarrow -4x-24=3y+9\Rightarrow -4x-3y-33=0\Rightarrow s\equiv 4x+3y+33=0$. Si ahora resolvemos el sistema formado por las rectas r y s obtenemos el punto M, es decir, $M=r\cap s$. Lo haremos por reducción:

$$\begin{cases}3x-4y+9=0\\4x+3y+33=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-12x+16y-36=0\\12x+9y+99=0\end{cases}\Rightarrow 25y+63=0\Rightarrow 25y=-63\Rightarrow y=-\frac{63}{25}$$

$$\begin{cases}3x-4y+9=0\\4x+3y+33=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9x-12y+27=0\\16x+12y+132=0\end{cases}\Rightarrow 25x+159=0\Rightarrow 25x=-159\Rightarrow x=-\frac{159}{25}$$

Por tanto, $M\left(-\dfrac{63}{25},-\dfrac{159}{25}\right)$. Así pues:

$$d(P,r)=d(P,M)=\sqrt{\left(-\frac{159}{25}+6\right)^2+\left(-\frac{63}{25}+3\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{9}{25}\right)^2+\left(\frac{12}{25}\right)^2}=\sqrt{\frac{81}{625}+\frac{144}{625}}=\sqrt{\frac{225}{625}}=\frac{15}{25}=0{,}6$$

También hay una fórmula para hallar la distancia de un punto $P(a,b)$ a una $r\equiv Ax+By+C=0$. Es la siguiente:

$$d(P,r)=\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Si utilizamos esta fórmula es mucho más rápido hallar la distancia entre un punto y una recta. En el caso del ejemplo anterior:

$$d(P,r)=\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|3\cdot(-6)+(-4)\cdot(-3)+9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-18+12+9|}{\sqrt{9+16}}=\frac{3}{\sqrt{25}}=\frac{3}{5}=0{,}6$$