Logaritmos

<table>
<tr><th colspan="3">Definición</th></tr>
<tr><td colspan="2">Si $a>0$ y $a\neq 1$, se llama logaritmo en base a de b al exponente al que hay que elevar la base a para obtener b
$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$</td><td>• $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$.
• $\log_3 81 = 4$ porque $3^4 = 81$.
• $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ porque $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Una observación de interés</th></tr>
<tr><td colspan="2">Los números que son potencias exactas de la base tienen logaritmos enteros (ejemplos anteriores). Si no es así el logaritmo es un número decimal.</td><td>• $\log_2 24$ es un número decimal situado entre 4 y 5 porque $2^4 = 16$ y $2^5 = 32$.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Propiedades de los logaritmos</th><th>Observaciones y ejemplos</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Números distintos tienen logaritmos distintos. O sea:
$$b \neq c \Rightarrow \log_a b \neq \log_a c$$
Además:
• Si $a>1$ y $b<c$, entonces $\log_a b < \log_a c$.
• Si $0<a<1$ y $b<c$, entonces $\log_a b > \log_a c$.</td><td>De lo anterior se deduce que el logaritmo de base mayor que 1 es creciente (a números mayores logaritmos mayores), y que el logaritmo de base un número comprendido entre 0 y 1 es decreciente (a números mayores logaritmos menores).</td></tr>
<tr><td>2</td><td>El logaritmo de en base a de a es igual a 1:
$$\log_a a = 1$$</td><td>Esta propiedad es evidente ya que $a^1 = a$.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>El logaritmo de 1 es 0, sea quien sea la base:
$$\log_a 1 = 0$$</td><td>Esta propiedad también es clara pues $a^0 = 1$.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos:
$$\log_a (b\cdot c) = \log_a b + \log_a c$$</td><td rowspan="4">Si $\log_2 r = 4,3$ y $\log_2 s = -1,7$, calcular $\log_2\left(\frac{r\cdot s}{4}\right)$ y $\log_2 \frac{2\sqrt{r}}{s^3}$.
• $\log_2\left(\frac{r\cdot s}{4}\right) = \log_2 (r\cdot s) - \log_2 4 =$
$= \log_2 r + \log_2 s - \log_2 4 = 4,3 + (-1,7) - 2 = 0,6$
• $\log_2 \frac{2\sqrt{r}}{s^3} = \log_2 2 + \log_2 \sqrt{r} - \log_2 s^3 =$
$= 1 + \log_2 r^{1/2} . \log_2 s^3 = 1 + \frac{1}{2}\log_2 r - 3\log_2 s =$
$= 1 + \frac{1}{2}\cdot 4,3 - 3\cdot(-1,7) = 1 + 2,15 + 5,1 = 8,25$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos:
$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base:
$$\log_a b^n = n\cdot \log_a b$$</td></tr>
<tr><td>7</td><td>El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice:
$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{\log_a b}{n}$$</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Cambio de base. El logaritmo en base a de un número se puede obtener a partir de logaritmos en otra base:
$$\log_a b = \frac{\log_k b}{\log_k a}$$</td><td></td></tr>
</table>

Logaritmos decimales

Los logaritmos en base 10 se llaman logaritmos decimales y, en lugar de designarse mediante $\log_{10}$ se designan simplemente con $\log$. Es decir:

$$\log_{10} x = \log x$$

La tecla **log** de la calculadora sirve para calcular logaritmos decimales. Por la propiedad 8 anterior, se pueden obtener, con la ayuda de la calculadora, el logaritmo de un número en cualquier base. Por ejemplo:

$$\log_3 45 = \frac{\log 45}{\log 3} = 3,464973521$$

El número *e*

El número e es muy especial en matemáticas. Se define como el número al que tiende la función $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ cuando x tiende a $+\infty$. De esta función podemos hallar sucesivamente $f(1)$, $f(2)$,…, $f(100)$,…, $f(1000)$,… Por ejemplo: $f(1000) = \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2,716923932$, $f(1000000) = \left(1 + \frac{1}{1000000}\right)^{1000000} = 2,718280469$.

Es posible demostrar (aunque esto requiere de matemáticas superiores), que cuando $x \to +\infty$, entonces $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ tiende a un número irracional al que llamaremos número e. Simbólicamente:

$$x \to \infty \Rightarrow f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \to e = 2,718281828\ldots$$

Logaritmos neperianos

Se llaman así a los logaritmos cuya base es el número e, y se designan mediante la abreviatura $\ln$. De este modo el logaritmo neperiano de un número x es:

$$\ln x = \log_e x$$

Su nombre proviene de John Napier, un matemático escocés, reconocido por ser el primero en definir los logaritmos.

La tecla **ln** de la calculadora sirve para calcular logaritmos neperianos. Estos logaritmos, además de su interés histórico, son enormemente importantes en matemáticas superiores.

Ejemplos

1. Solamente utilizando la definición de logaritmo podemos calcular $\log_2 64 + \log_2 \frac{1}{4} - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2}$. Observa:

$$\log_2 64 + \log_2 \frac{1}{4} - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^6 + \log_2 2^{-2} - \log_3 3^2 - \log_2 2^{1/2} =$$

$$= 6\log_2 2 + (-2)\log_2 2 - 2\log_3 3 - \frac{1}{2}\log_2 2 = 6 - 2 - 2 - \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

2. Utilizando la definición de logaritmo también podemos resolver ecuaciones donde la incógnita es la base del logaritmo. Por ejemplo $\log_x 125 = 3 \Leftrightarrow x^3 = 125 \Leftrightarrow x^3 = 5^3 \Leftrightarrow x = 3$.
3. Podemos expresar como un solo logaritmo ciertas expresiones, por ejemplo $\log b + 2\log c - \log d$. Basta aplicar las propiedades a la inversa: $\log b + 2\log c - \log d = \log b + \log c^2 - \log d = \log\left(b \cdot c^2\right) - \log d = \log \frac{b \cdot c^2}{d}$.
4. Con la calculadora y utilizando el cambio de base se pueden hallar logaritmos de base cualquier número.

$$\log_7 938 = \frac{\log 938}{\log 7} \simeq 3,517 \quad ; \quad \log_{3/2} 127 = \frac{\ln 127}{\ln(3/2)} \simeq 11,947$$