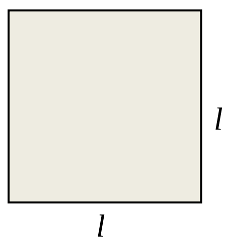
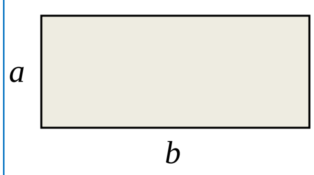
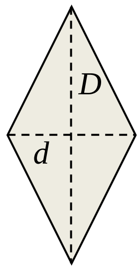
Área de figuras planas

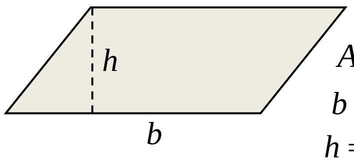
Tendremos en cuenta que, en cada caso, llamaremos A al área o superficie de cada una de las figuras planas.

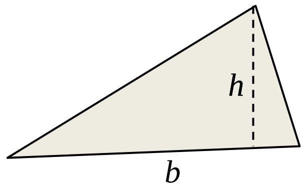
Polígonos

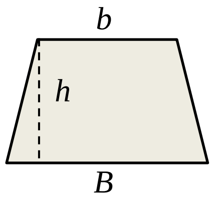
<table>
<tr><th>Cuadrado</th><th>Rectángulo</th><th>Rombo</th></tr>
<tr>
<td>

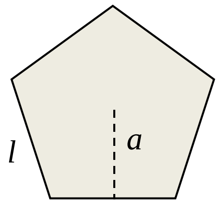
$A = l^2$
l = lado</td>
<td>

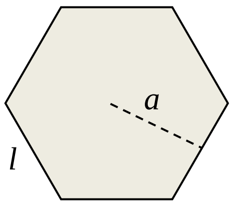
$A = b \cdot a$
b = base
a = altura</td>
<td>

$A = \dfrac{D \cdot d}{2}$
D = diagonal mayor
d = diagonal menor</td>
</tr>
<tr><th>Romboide o paralelogramo</th><th>Triángulo</th><th>Trapecio</th></tr>
<tr>
<td>

$A = b \cdot h$
b = base
h = altura</td>
<td>

$A = \dfrac{b \cdot h}{2}$
b = base
h = altura</td>
<td>

$A = \dfrac{(B+b) \cdot h}{2}$
B = base mayor
b = base menor</td>
</tr>
<tr><th colspan="3">Polígono regular: pentágono, hexágono, heptágono, octógono, etc.</th></tr>
<tr><td colspan="3">



Llamemos P al perímetro y n al número de lados de cada polígono regular. Entonces $P = l \cdot n$ y $A = \dfrac{P \cdot a}{2}$
l = lado</td></tr>
</table>

Ejercicio resuelto

Calcula el área de un pentágono regular cuyo lado mide 6 centímetros si el radio de la circunferencia circunscrita es de 5 centímetros.

Solución

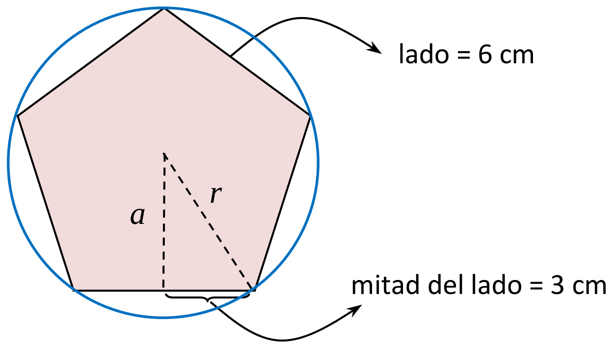
La apotema a forma un triángulo rectángulo con el radio r y la mitad del lado. Por tanto, podemos aplicar el teorema de Pitágoras para calcular la longitud, es decir:

$$r^2 = 3^2 + a^2 \Rightarrow a^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4\,\text{cm}$$

Así, el área es:

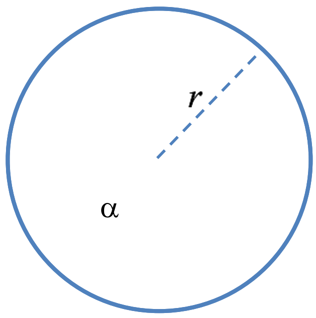
$$A = \frac{(6 \cdot 5) \cdot 4}{2} = 60\ \text{cm}^2$$



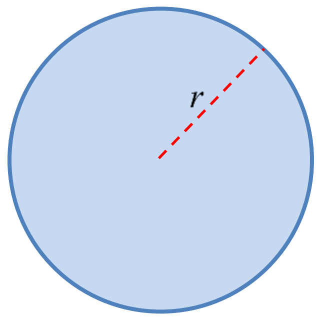
Figuras circulares

Seguiremos llamando A al área o superficie de cada figura circular. También denotaremos con L a la longitud de la figura circular y mediante P al perímetro de la figura correspondiente.

Circunferencia y círculo

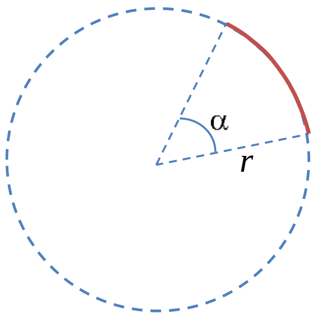


$$L = 2 \cdot \pi \cdot r$$

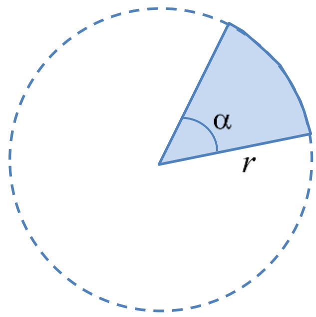


$$A = \pi \cdot r^2$$

Arco de circunferencia y sector circular



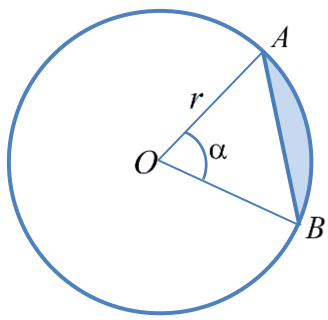
$$L = \frac{2\pi r \cdot \alpha}{360^{\circ}}$$



$$A = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360^{\circ}}$$

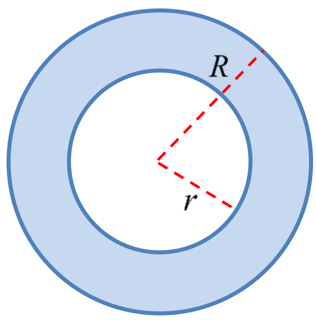
$$P = \frac{2\pi r \cdot \alpha}{360^{\circ}} + 2r$$

Segmento circular y corona circular



$$A = A_{\text{Sector}} - A_{\text{Triángulo } OAB}$$

$$P = \frac{2\pi r \cdot \alpha}{360^{\circ}} + \overline{AB}$$



R: radio circunferencia mayor

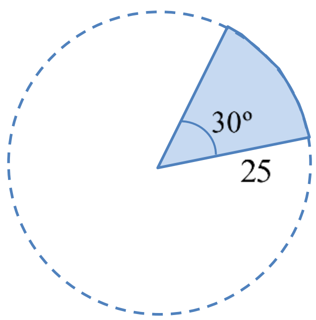
r: radio circunferencia menor

$$A = \pi\left(R^2 - r^2\right)$$

Ejercicio resuelto

En un circuito de carreras completamente circular, de 25 m de radio, hay que trazar un arco de circunferencia con un ángulo de 30° y pintar el sector circular correspondiente. Calcula la longitud del arco de la circunferencia y el área del sector circular.

Solución



La longitud del arco de circunferencia es:

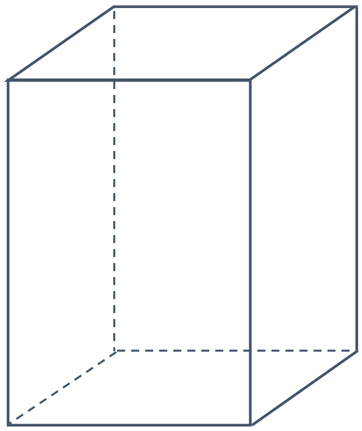
$$L = \frac{2\pi \cdot 25 \cdot 30^{\circ}}{360^{\circ}} = 13,09\,\text{m}$$

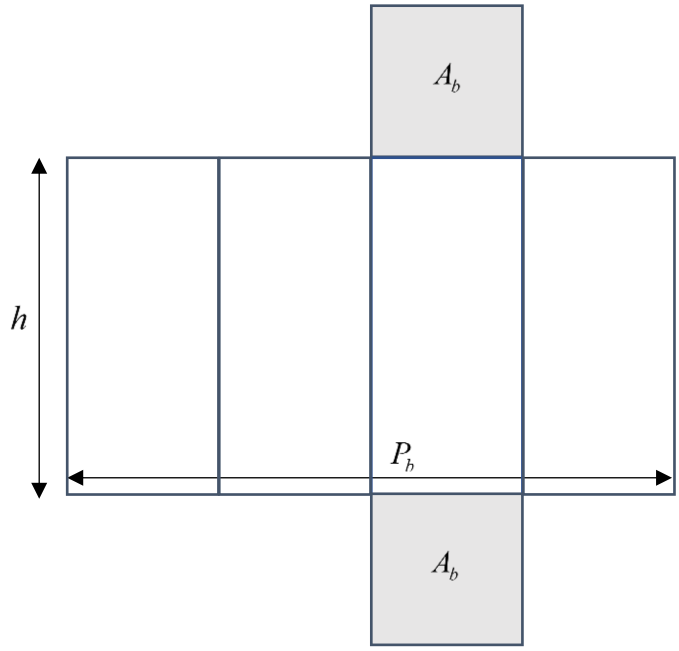
El área del sector circular mide:

$$A = \pi \cdot 25^2 \cdot \frac{30^{\circ}}{360^{\circ}} = 163,62\,\text{m}^2$$

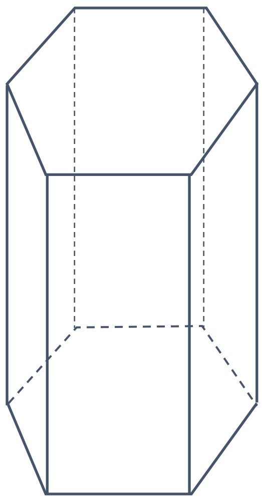
Prismas rectos

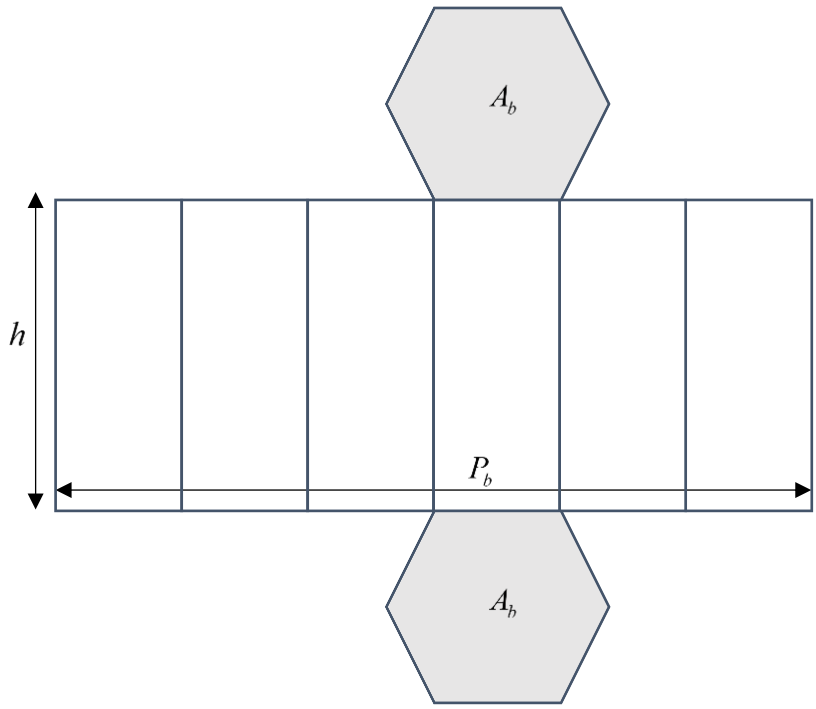
Prisma cuadrangular y su desarrollo





Prisma hexagonal y su desarrollo

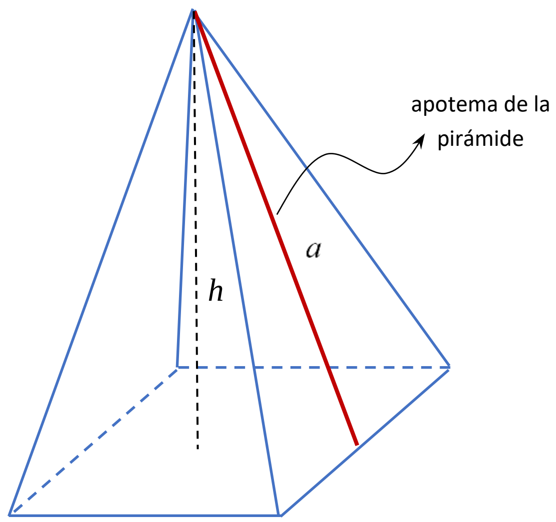


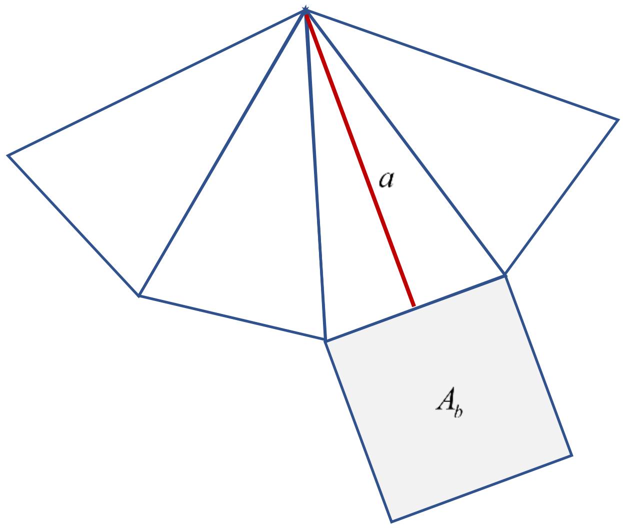


Si las aristas laterales de un prisma son perpendiculares a las aristas de la base (aristas básicas), se dice que el prisma es ***recto***. En caso contrario, se denomina prisma ***oblicuo***. En los prismas rectos, si los polígonos de la base son regulares, se denominan ***prismas regulares***. Cuando el polígono de la base no es regular se denomina ***prisma irregular***. Nosotros nos limitaremos al estudio de prismas rectos y regulares. Obsérvese que, al igual que en los dos casos anteriores, se pueden construir prismas rectos y regulares cuya base sea un triángulo equilátero, un pentágono, o cualquier otro polígono regular.

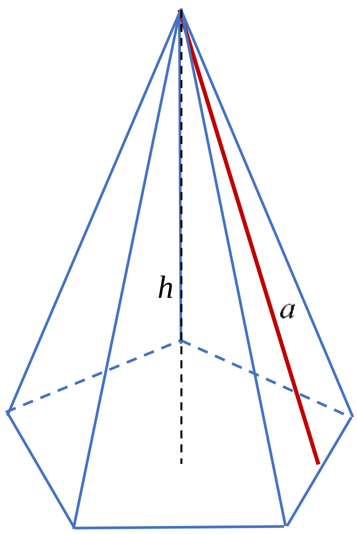
Pirámides regulares

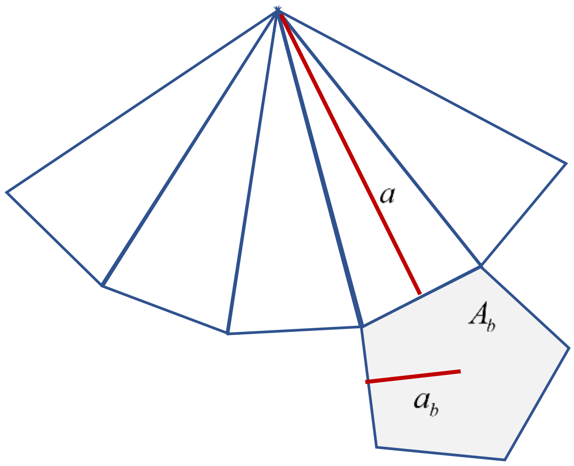
Pirámide cuadrangular y su desarrollo





Pirámide pentagonal y su desarrollo





Se dice que una pirámide es ***recta*** si todas las caras laterales son triángulos isósceles. Si no es así, se denomina ***oblicua***. Una pirámide es ***regular*** si es recta y su base es un polígono regular. En caso contrario, la pirámide es ***irregular***. Nosotros nos limitaremos al estudio de pirámides regulares. Observa que en una pirámide los triángulos que hacen de caras laterales concurren en un punto común, denominado ***vértice de la pirámide***. Recordemos también que la ***altura de la pirámide*** es la longitud del segmento perpendicular trazado desde el vértice hasta la base de la pirámide

Obsérvese que, al igual que en los dos casos anteriores, se pueden construir pirámides regulares cuya base sea un triángulo equilátero, un hexágono, un octógono o cualquier otro polígono regular. Recordemos asimismo que una pirámide formada por cuatro triángulos equiláteros iguales recibe el nombre de ***tetraedro***.

Área y volumen de prismas rectos y pirámides regulares

Un ***poliedro*** es un cuerpo geométrico cerrado limitado por caras en forma de polígonos. Hay que tener en cuenta que el área de un poliedro es la suma de las áreas de todas sus caras. Los ***prismas rectos*** y las ***pirámides regulares*** son casos particulares de poliedros. Usaremos las siguientes notaciones en el cálculo de áreas de prismas y pirámides.

- A_l : área lateral del cuerpo geométrico (suma de las áreas de todas las caras laterales).
- A_b : área de la base.
- A : área total del cuerpo geométrico.
- P_b : perímetro de la base.
- V : volumen del cuerpo geométrico.
- h : altura del cuerpo geométrico (la altura de la pirámide es la longitud del segmento perpendicular trazado desde el vértice hasta la base de la pirámide).
- a : si se trata de un prisma recto se referirá a la apotema de la base; si se trata de una pirámide regular se referirá a la apotema de la misma, es decir, a la altura de cualquiera de sus caras laterales (que son triángulos).
- a_b : apotema de la base de una pirámide regular.

Área y volumen de un prisma recto

El área total de un prisma recto es igual al área lateral más dos veces el área de la base. El área lateral se puede hallar multiplicando el perímetro de la base por la altura. El volumen es igual al área de la base por la altura. De este modo:

$$\boxed{A = A_l + 2\cdot A_b = P_b\cdot h + 2\cdot A_b} \ ; \ \boxed{V = A_b\cdot h}$$

Casos particulares ***(no se aconseja aprender estas fórmulas de memoria, sino entender cómo se deducen de las fórmulas anteriores)***

1. Un ***cubo*** es un prisma recto cuyas caras son 6 cuadrados. Para hallar el área y el volumen de un cubo en función de su arista l, tenemos que el perímetro de la base es $4l$, la altura es l y el área de la base es l^2. Por tanto:
$$A = P_b\cdot h + 2\cdot A_b = 4l\cdot l + 2l^2 = 4l^2 + 2l^2 \Rightarrow \boxed{A = 6l^2} \ ; \ V = A_b\cdot h = l^2\cdot l \Rightarrow \boxed{V = l^3}$$
2. Un ***ortoedro*** es un prisma recto cuya base es un rectángulo.
3. Área y volumen de un prisma recto hexagonal (la base es un hexágono), en función del lado l de la base, de su altura h y de la apotema de la base a.
$$A = P_b\cdot h + 2\cdot A_b = 6l\cdot h + 2\cdot\frac{6l\cdot a}{2} = 6lh + 6la \Rightarrow \boxed{A = 6l(h+a)} \ ; \ V = A_b\cdot h = \frac{6l\cdot a}{2}\cdot h \Rightarrow \boxed{V = 3lah}$$
4. Las fórmula anteriores se puede generalizar a un prisma recto cuya base sea un polígono regular de n lados, donde volveremos a llamar l al lado de la base, h a la altura del prisma y a a la apotema de la base.
$$A = P_b\cdot h + 2\cdot A_b = nl\cdot h + 2\cdot\frac{nl\cdot a}{2} = nlh + nla \Rightarrow \boxed{A = nl(h+a)} \ ; \ V = A_b\cdot h = \frac{nl\cdot a}{2}\cdot h \Rightarrow \boxed{V = \frac{nlah}{2}}$$

Área y volumen de una pirámide regular

El área total de una pirámide regular es igual al área lateral más el área de la base. Como las caras laterales son triángulos, el área lateral se puede hallar multiplicando el perímetro de la base por la apotema de la pirámide (que es la altura de cada triángulo) y dividiendo entre dos. El volumen es un tercio del área de la base por la altura. En fórmulas:

$$\boxed{A = A_l + A_b = \frac{P_b\cdot a}{2} + \frac{P_b\cdot a_b}{2} = \frac{P_b\cdot(a+a_b)}{2}} \ ; \ \boxed{V = \frac{1}{3}\cdot A_b\cdot h}$$

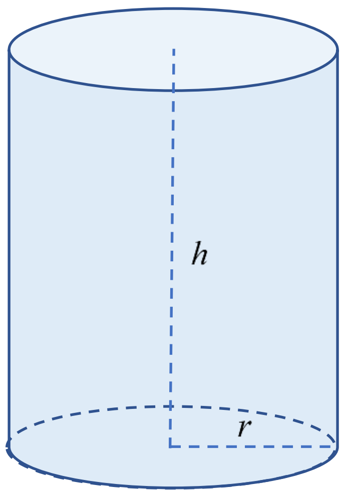
Casos particulares

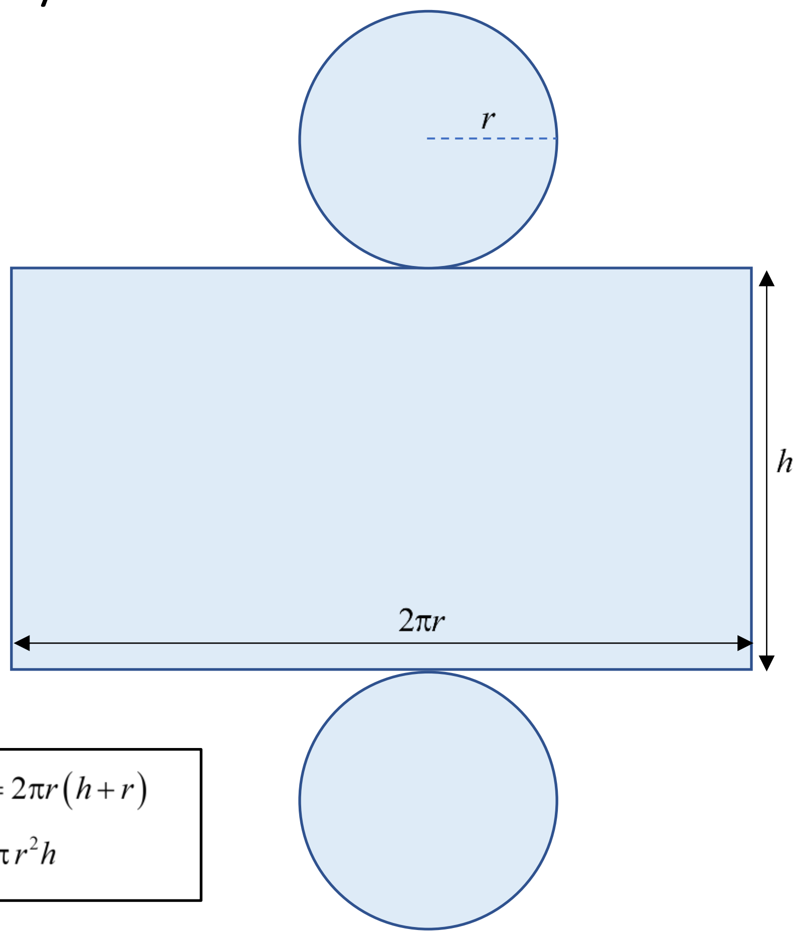
5. Un ***tetraedro*** es una pirámide regular cuyas caras son 4 triángulos equiláteros.
6. Área y volumen de una pirámide cuya base es un cuadrado en función del lado l de la base y la apotema a de la pirámide (las pirámides de Egipto son pirámides de este tipo).
$$A = A_l + A_b = \frac{P_b\cdot a}{2} + l^2 = \frac{4\cdot l\cdot a}{2} + l^2 \Rightarrow \boxed{A = 2la + l^2} \ ; \ V = \frac{1}{3}\cdot A_b\cdot h \Rightarrow \boxed{V = \frac{l^2h}{3}}$$

Cuerpos de revolución: cilindro y cono

Un ***cuerpo de revolución*** es un cuerpo geométrico que se obtiene al girar una figura plana alrededor de una recta (eje de giro). El ***cilindro*** se obtiene al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados. El ***cono*** se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. La hipotenusa de tal triángulo recibe el nombre de ***generatriz***.

Cilindro y su desarrollo. Área y volumen

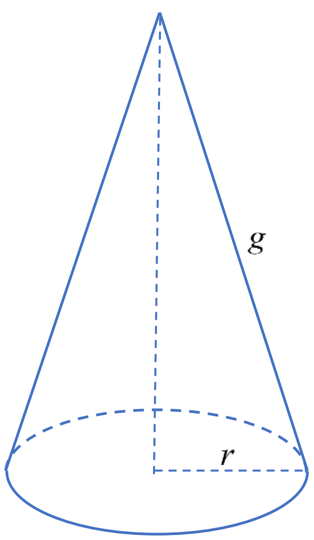


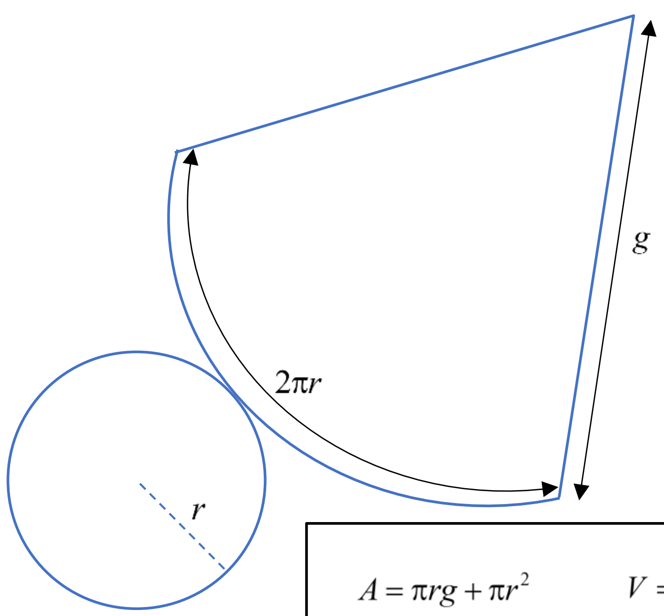


$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\left(h + r\right)$$

$$V = A_b \cdot h = \pi r^2 h$$

Cono y su desarrollo. Área y volumen

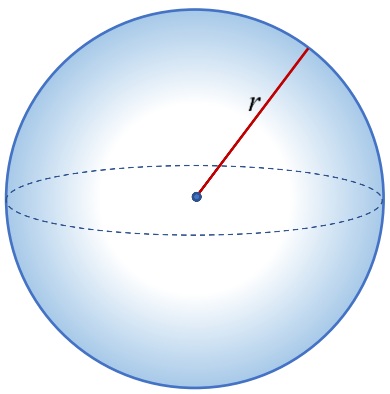
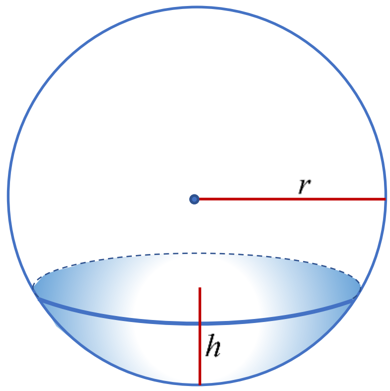
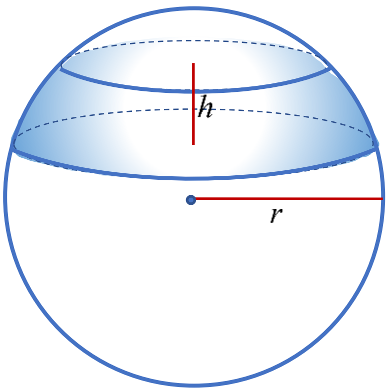
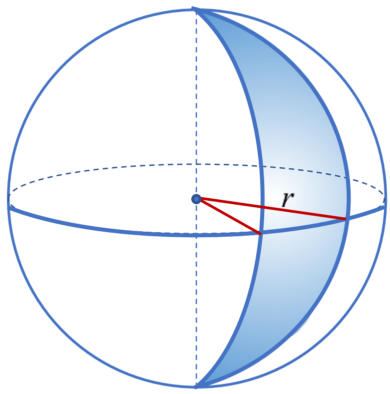




$$A = \pi rg + \pi r^2 \qquad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

La esfera y cuerpos asociados

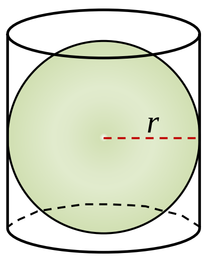
La ***esfera*** es un cuerpo de revolución que se obtiene al hacer girar una circunferencia alrededor de su diámetro. El resto de cuerpos asociados a la esfera (***casquete esférico***, **zona esférica** y **huso esférico**) son de interés por su aplicación en otras áreas de las ciencias. De ellos solamente daremos la fórmula del área.

Esfera	Casquete esférico
 $A=4\pi r^2$; $V=\frac{4}{3}\pi r^3$	 $A=2\pi r h$
Zona esférica	**Huso esférico**
 $A=2\pi r h$	 $A=\frac{4\pi r^2 \alpha}{360^{\circ}}$ α es el ángulo que se forma entre los dos radios

Propiedad

El área de una esfera es igual al área lateral de un cilindro que la contiene, ajustándose completamente a ella (ver figura de la derecha), es decir, en este caso el volumen de ambos cuerpos es:

$$V=4\pi r^2$$



Ejercicios

Para practicar los contenidos anteriores puedes intentar hacer algunos de los siguientes ejercicios del libro de texto (Matemáticas 4º ESO. Enseñanzas académicas. Editorial Santillana. Proyecto "SABER HACER"):

- **Página 114**: 1, 2, 3.
- **Página 115**: 4, 5.
- **Página 116**: 6, 7, 8.
- **Página 117**: 9, 10.
- **Página 118**: 11, 12, 13.
- **Página 119**: 14, 15.
- **Página 120**: 16, 17, 18.
- **Página 121**: 19, 20, 21.
- **Página 122**: 22, 23, 24.
- **Página 123**: 25, 26, 27, 28.
- **Página 126**: del 35 al 40, ambos inclusive; 42, 43, 44.
- **Página 127**: del 45 al 59, ambos inclusive.
- **Página 128**: del 61 al 67, ambos inclusive.
- **Página 129**: del 68 al 78, ambos inclusive.
- **Página 130**: 80, 81.
- **Página 131**: 83, 84.

Observaciones

En las actividades finales del libro (páginas 126-130), hay algunas de ellas resueltas. Es importante que las estudies y las comprendas. Te darán pistas para resolver otros problemas similares. Son las siguientes: 41, 60, 79 y 82.

También es importante que estudies y comprendas la sección "SABER HACER" del libro de texto. En ella se explican los pasos a seguir para realizar muchos de los ejercicios y problemas. La puedes encontrar en las páginas siguientes: 115, 117, 119, 121 y 123.

Es conveniente que intentes hacer las actividades que te propongas por ti mismo/a. De todas formas, para saber si la respuesta a un ejercicio que hayas intentado es correcta, puedes consultar las soluciones a los ejercicios en la página Web del profesor (lasmatematicas.eu). En clase normalmente haremos ejercicios y problemas entre todos. Por tanto, debes aprovechar también la hora de clase para consultarme todas las dudas que te surjan.