Examen de Matemáticas – 3º de ESO

***Instrucciones**: en todos y cada uno de los ejercicios es obligatorio hacer un desarrollo o procedimiento, por breve que sea, que lleve a la solución.*

Ecuaciones y sistemas:

1. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado: **(2 puntos; 1 punto por apartado)**

a) $2\left(x^2+2x-3\right)-\frac{7}{2}x=3$ b) $\frac{x\left(x-3\right)}{2}-\frac{5x-1}{4}=\frac{x^2+2}{3}-\frac{x+5}{2}$

2. Resuelve el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método que consideres más adecuado: **(1 punto)**

$$\left.\begin{aligned}\frac{3x-y}{2}-2x=\frac{-x-y}{3}-1\\ -x+y=2\end{aligned}\right\}$$

Problemas:

3. Se han consumido las $\frac{5}{7}$ partes de un bidón. Reponemos 8 litros y queda lleno en sus $\frac{2}{5}$ partes. Calcula la capacidad del bidón. **(1 punto)**

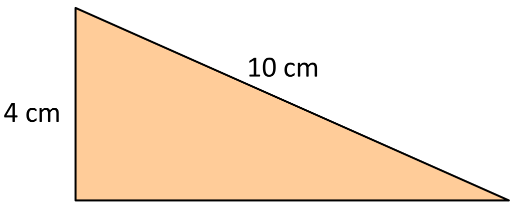
4. Una persona tiene en su caja fuerte 3950 euros en billetes de 20 euros y de 50 euros. Sabe que en total tiene 100 billetes. ¿Cuántos billetes de cada clase hay? **(1 punto)**

Geometría:

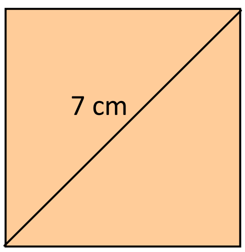
5. Juan y María navegan sobre una barca de lona en una piscina de 50 metros de largo y 14 metros de ancho. Quieren que la barca recorra la mayor distancia posible sin cambiar de dirección ¿Cuál es esa distancia? **(1 punto)**

6. Halla el área de las figuras siguientes. **(4 puntos; 1 punto por apartado)**

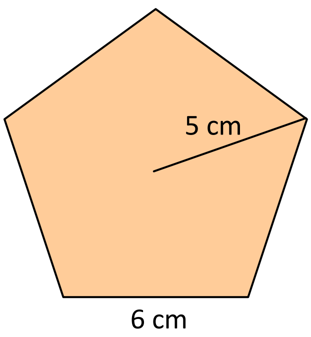
a)



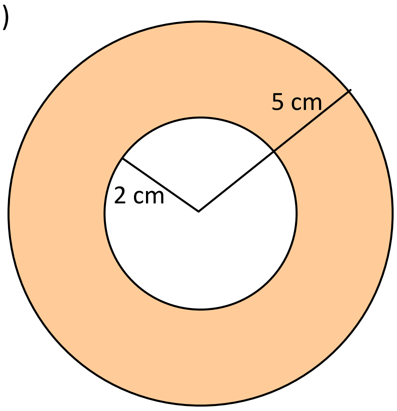
b)



c)



d)



Soluciones:

1. a) $2\left(x^2+2x-3\right)-\frac{7}{2}x=3\Rightarrow 2x^2+4x-6-\frac{7}{2}x=3\Rightarrow 4x^2+8x-12-7x=6\Rightarrow$

$$\Rightarrow 4x^2+x-18=0\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 4\cdot(-18)}}{2\cdot 4}=\frac{-1\pm\sqrt{1+288}}{8}=$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{289}}{8}=\frac{-1\pm 17}{8}=\begin{cases} x_1=\frac{16}{8}=2 \\ x_2=\frac{-18}{8}=\frac{-9}{4}\end{cases}$$

b) $\frac{x(x-3)}{2}-\frac{5x-1}{4}=\frac{x^2+2}{3}-\frac{x+5}{2}\Rightarrow\frac{x^2-3x}{2}-\frac{5x-1}{4}=\frac{x^2+2}{3}-\frac{x+5}{2}\Rightarrow$

$$6\left(x^2-3x\right)-3(5x-1)=4\left(x^2+2\right)-6(x+5)\Rightarrow$$

$$6x^2-18x-15x+3=4x^2+8-6x-30\Rightarrow 2x^2-27x+25=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{27\pm\sqrt{(-27)^2-4\cdot 2\cdot 25}}{2\cdot 2}=\frac{27\pm\sqrt{729-200}}{4}=\frac{27\pm\sqrt{529}}{4}=$$

$$=\frac{27\pm 23}{4}=\begin{cases} x_1=\frac{50}{4}=\frac{25}{2} \\ x_2=\frac{4}{4}=1\end{cases}$$

2. $\left.\begin{array}{r}\frac{3x-y}{2}-2x=\frac{-x-y}{3}-1 \\ -x+y=2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}3(3x-y)-12x=2(-x-y)-6 \\ -x+y=2\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}9x-3y-12x=-2x-2y-6 \\ -x+y=2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}-x-y=-6 \\ -x+y=2\end{array}\right\}$. Sumando ahora ambas ecuaciones (método de reducción), se tiene $-2x=-4\Rightarrow x=\frac{-4}{-2}\Rightarrow x=2$. Sustituyendo este valor en la segunda ecuación: $-2+y=2\Rightarrow y=2+2\Rightarrow y=4$.

3. Llamemos *x* a la capacidad del bidón. Entonces, si se han consumido las $\frac{5}{7}$ partes, quedan en el bidón $\frac{2}{7}$ partes. Luego reponemos 8 litros y queda lleno en sus $\frac{2}{5}$ partes. Esto se puede mediante la siguiente ecuación: $\frac{2}{7}x+8=\frac{2}{5}x$

Multiplicando por 35 todos los términos y despejando:

$$10x+280=14x\Rightarrow 10x-14x=-280\Rightarrow -4x=-280\Rightarrow x=\frac{-280}{-4}\Rightarrow x=70.$$

Por tanto, la capacidad del bidón es de 70 litros.

4. Llamemos x al número de billetes de 20 euros y llamemos y al número de billetes de 50 euros. Entonces, según el enunciado: $\left.\begin{array}{r} 20x+50y=3950 \\ x+y=100 \end{array}\right\}$. Despejando x de la segunda ecuación: $x=100-y$. Sustituyendo este valor en la primera ecuación:

$$20(100-y)+50y=3950 \Rightarrow 2000-20y+50y=3950 \Rightarrow 30y=3950-2000 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 30y=1950 \Rightarrow y=\dfrac{1950}{30} \Rightarrow y=65$. Sustituyendo ahora en $x=100-y$ tenemos $x=100-65 \Rightarrow x=35$.

Por tanto, hay 35 billetes de 20 euros y 65 billetes de 50 euros.

5. La distancia máxima que puede recorrer la barca sin cambiar de dirección es la diagonal d del rectángulo. Apliquemos el teorema de Pitágoras:

$d^2=50^2+14^2 \Rightarrow d^2=2500+196 \Rightarrow d^2=2696 \Rightarrow d=\sqrt{2696} \Rightarrow d=51,92$ metros.

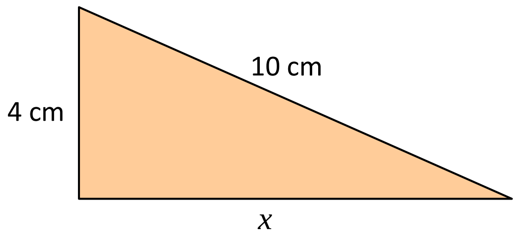
6. a) Hallemos la base x utilizando el teorema de Pitágoras:

$10^2=4^2+x^2 \Rightarrow 100=16+x^2 \Rightarrow x^2=100-16$

$\Rightarrow x^2=84 \Rightarrow x=\sqrt{84}=9,165$ cm.

Por tanto el área del triángulo es

$A=\dfrac{base \times altura}{2}=\dfrac{9,165 \cdot 4}{2}=18,33$ cm^2.

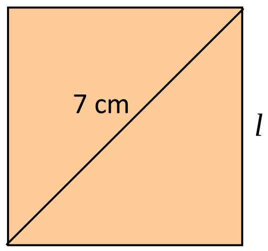


b) El lado l del cuadrado lo hallaremos utilizando el teorema de Pitágoras:

$l^2+l^2=7^2 \Rightarrow 2l^2=49 \Rightarrow l^2=\dfrac{49}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow l^2=24,5 \Rightarrow l=\sqrt{24,5}=4,95$ cm.

Por tanto el área del cuadrado es $A=l^2=24,5$ cm^2.



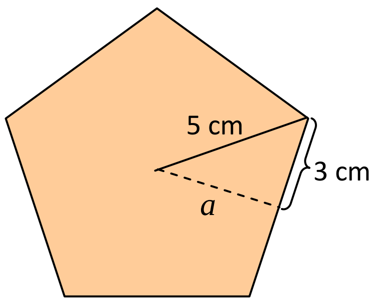
c) La apotema a del pentágono se puede hallar mediante el teorema de Pitágoras:

$5^2=a^2+3^2 \Rightarrow 25=a^2+9 \Rightarrow a^2=25-9 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2=16 \Rightarrow a=4$ cm.

Entonces el área del pentágono es:

$A=\dfrac{perímetro \times apotema}{2}=\dfrac{30 \cdot 4}{2}=60$ cm^2.



d) El área de la corona circular es: $A=\pi R^2-\pi r^2$, donde R es el radio mayor y r es el radio menor. Por tanto:

$A=\pi 5^2-\pi 2^2=25\pi-4\pi=21\pi=65,97$ cm^2.