Razón y proporción

Una **razón** entre dos números a y b, es el cociente $\frac{a}{b}$. La diferencia entre una fracción y una razón es que en la fracción tanto a como b son números enteros, y en la razón pueden ser otros números, por ejemplo decimales.

Una **proporción** es la igualdad entre dos razones. Así, la proporción entre la razón a y b y entre la razón c y d es $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Se lee "a es a b como c es a d". En esta proporción, a y d se llaman **extremos de la proporción** y b y c se llaman **medios de la proporción**.

Llamamos **constante de proporcionalidad** de una proporción al cociente de cualquiera de sus razones.

Ejemplo 1:
Las razones $\frac{5}{8}$ y $\frac{7,5}{12}$ forman una proporción, es decir, $\frac{5}{8}=\frac{7,5}{12}$ ya que $\frac{5}{8}=0,625$ y $\frac{7,5}{12}=0,625$. La constante de proporcionalidad de esta proporción es $0,625$.

Propiedad fundamental de las proporciones

En una proporción, el producto de extremos es igual al producto de medios:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$$

Ejemplo 2:
En la proporción del ejemplo 1 se cumple esta propiedad. Veámoslo:

$$\frac{5}{8}=\frac{7,5}{12}\Leftrightarrow 5\cdot 12=8\cdot 7,5\Leftrightarrow 60=60$$

Para **calcular un extremo** de una proporción, conocidos los otros tres términos, se multiplican los medios y se divide entre el otro extremo. Supongamos que desconocemos el extremo d, que lo vamos a llamar x. Entonces:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}\Rightarrow x=\frac{b\cdot c}{a}$$

Para **calcular un medio** de una proporción, conocidos los otros tres términos, se multiplican los extremos y se divide entre el otro medio. Supongamos que desconocemos el medio c, que lo vamos a llamar x. Entonces:

$$\frac{a}{b}=\frac{x}{c}\Rightarrow x=\frac{a\cdot c}{b}$$

Ejemplo 3:
Calcula el término desconocido en estas proporciones: $\frac{5}{3}=\frac{17}{x}$, $\frac{4}{9}=\frac{38}{x}$

$$\frac{5}{3}=\frac{17}{x}\Rightarrow x=\frac{3\cdot 17}{5}=\frac{51}{5}=10,2\quad,\quad \frac{9}{4}=\frac{x}{38}\Rightarrow x=\frac{9\cdot 38}{4}\Rightarrow x=85,5$$

Magnitudes directamente proporcionales

Dos **magnitudes** son **directamente proporcionales** si al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda multiplicada (o dividida) por ese mismo número.

Supongamos que A y B son magnitudes directamente proporcionales con los siguientes valores:

Magnitud A	a_1	a_2	a_3	...	m
Magnitud B	b_1	b_2	b_3	...	n

Entonces al formar las razones con los valores correspondientes de ambas magnitudes, la constante de proporcionalidad siempre es la misma:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=\frac{m}{n}=k$$

Ejemplo 4:
En una frutería el kilo de manzanas vale 2,5 euros. Entonces las magnitudes peso (en kg) y precio (en €) son directamente proporcionales y se cumple que:

Peso (kg)	1	2	3	...	6	...
Precio (€)	2,5	5	7,5	...	15	...

Observa que al multiplicar (o dividir) un valor de una de las magnitudes, el valor correspondiente de la otra magnitud queda multiplicado (o dividido) por ese número. Además, al formar razones con los valores correspondientes de ambas magnitudes, la constante de proporcionalidad es siempre la misma:

$$\frac{1}{2,5}=\frac{2}{5}=\frac{3}{7,5}=\frac{6}{15}=0,4$$

Regla de tres simple directa

La **regla de tres simple directa** es un procedimiento para hallar una cantidad desconocida que forma proporción con otras cantidades conocidas, correspondientes a magnitudes directamente proporcionales. En la práctica se forma una proporción en la que se desconoce un término al que llamaremos x. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 5:
Una máquina produce 800 tornillos en 5 horas. ¿Cuánto tiempo tardará en fabricar 1000 tornillos?

$$\frac{800}{1000}=\frac{5}{x}\Rightarrow x=\frac{1000\cdot 5}{800}=6,25$$

Por tanto el tiempo que tardará la máquina en fabricar 1000 tornillos es 6,25 horas, des decir, 6 horas y cuarto.

También podemos resolver el problema del ejemplo anterior por un método llamado **reducción a la unidad**. Si tenemos dos magnitudes directamente proporcionales, **reducir a la unidad** es calcular la cantidad de una de las magnitudes que corresponde a una unidad de la otra magnitud.

Ejemplo 6:
En el ejemplo anterior hallamos el tiempo que tarda la máquina en fabricar un tornillo, que es

$$\frac{800}{5}=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{5}{800}=0,00625 \text{ horas}$$

Por tanto, en fabricar 1000 tornillos tardará $0,00625\cdot 1000=6,25$ horas.
Observa que obtenemos el mismo resultado que el obtenido en el ejemplo anterior.

Magnitudes inversamente proporcionales

Dos **magnitudes** son **inversamente proporcionales** si al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda dividida (o multiplicada) por ese mismo número.

Supongamos que A y B son magnitudes inversamente proporcionales con los siguientes valores:

Magnitud A	a_1	a_2	a_3	...	m
Magnitud B	b_1	b_2	b_3	...	n

Entonces se cumple que:

$$a_1\cdot b_1=a_2\cdot b_2=a_3\cdot b_3=\ldots=m\cdot n=k$$

Al valor de k se le llama **constante de proporcionalidad inversa**.

Ejemplo 7:
Si un pintor tarda 48 días en pintar una casa, la relación entre el número de pintores y el tiempo que tardan en pintar una casa es inversamente proporcional, y se cumple que:

Nº de pintores	1	2	3	…	6	…
Días	48	24	16	…	8	…

En este caso, al multiplicar (o dividir) el número de pintores por un número, el número de días queda dividido (o multiplicado) por ese mismo número. Además se cumple que:

$$1\cdot 48=2\cdot 24=3\cdot 16=8\cdot 8=48$$

Regla de tres simple inversa

La **regla de tres simple inversa** es un procedimiento para hallar una cantidad desconocida que forma proporción con otras cantidades conocidas, correspondientes a dos magnitudes inversamente proporcionales. En la práctica se forma una proporción entre una razón entre las dos magnitudes y la inversa de otra razón entre las dos mismas magnitudes, en la que se desconoce un término al que llamaremos x. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 8:
Un tren a una velocidad de 90 km/h tarda 2 horas en realizar un trayecto. ¿Cuánto tiempo tardará en hacer este trayecto si va a 75 km/h?

Observa que las magnitudes velocidad y tiempo son inversamente proporcionales, pues a más velocidad, menos tiempo tardará el tren en realizar el trayecto. Llamemos x al tiempo que tardará el tren en hacer el trayecto si va a 75 km/h. Entonces:

$$\frac{90}{75}=\frac{x}{2}\Rightarrow x=\frac{90\cdot 2}{75}=2,4$$

Por tanto el tren tardará en hacer este trayecto $2,4$ horas si va a una velocidad de 75 km/h.

También podemos resolver el problema del ejemplo anterior **reduciendo a la unidad**. Si tenemos dos magnitudes directamente proporcionales, **reducir a la unidad** es calcular la cantidad de una de las magnitudes que corresponde a una unidad de la otra magnitud.

Ejemplo 9:
En el ejemplo anterior hallamos lo que tardaría en llegar el tren si se desplazara a 1 km/h:

$$\frac{90}{1}=\frac{x}{2}\Rightarrow x=180 \text{ horas}$$

Si a 1 km/h tarda 180 horas, a 75 km/h tardará $180:75=2,4$ horas
Observa que obtenemos el mismo resultado que el obtenido en el ejemplo anterior.

Porcentajes

El **porcentaje** o **tanto por ciento** de una cantidad, cuyo símbolo es %, significa que de cada 100 partes de esa cantidad tomamos el tanto indicado.
Para **calcular el porcentaje o tanto por ciento de una cantidad**, multiplicamos es cantidad por el tanto por ciento y lo dividimos entre 100. Así el $k\%$ de una cantidad c es $\frac{k\cdot c}{100}$.

Ejemplo 10:
El 60% de 2300 es $\frac{60\cdot 2300}{100}=\frac{138000}{100}=1380$

Observa que en los porcentajes aparecen siempre tres cantidades relacionadas: el tanto por ciento, que llamaremos k, la cantidad total c y la parte a, de tal manera que $k\%\text{ de } c=a\Rightarrow\frac{k\cdot c}{100}=a$.

Para resolver problemas con porcentajes se conocen dos de las tres cantidades anteriores y hay que despejar la tercera. Para ello podemos utilizar la fórmula anterior. También podemos recurrir a hacer reglas de tres directas. Veamos un par de ejemplos.

Ejemplo 11:
Luis compra un coche por 16000 € y le hacen un descuento de 1920 €. ¿Qué porcentaje le descuentan?

Método 1. Utilizando la fórmula $k\%$ de $c = a \Rightarrow \frac{k \cdot c}{100} = a$. En este caso la cantidad desconocida es k. Por tanto:

$$\frac{k \cdot 16000}{100} = 1920 \Rightarrow k = \frac{1920 \cdot 100}{16000} = 12$$

Es decir, le descuentan el 12%.

Método 2. Utilizando una regla de tres directa. Podemos formar la siguiente proporción:

$$\frac{16000}{100} = \frac{1920}{x} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 1920}{16000} = 12$$

Vemos que, en este caso, también obtenemos el mismo resultado. Un porcentaje de descuento del 12%.

Ejemplo 12:
¿Cuál era el precio de un ordenador que está rebajado un 18% si me ha costado 900 €?

Método 1. Utilizando la fórmula $k\%$ de $c = a \Rightarrow \frac{k \cdot c}{100} = a$. En este caso la cantidad desconocida es c. Por tanto:

$$\frac{82 \cdot c}{100} = 900 \Rightarrow c = \frac{900 \cdot 100}{82} = 1097,56$$

Es decir, el precio del ordenador era 1097,56 €.

Método 2. Utilizando una regla de tres directa. Podemos formar la siguiente proporción:

$$\frac{82}{900} = \frac{100}{x} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 900}{82} = \frac{90000}{82} = 1097,56$$

Vemos que, en este caso, también obtenemos el mismo resultado. El precio del ordenador era 1097,56 €.

Aumentos y disminuciones porcentuales

Aumentar una cantidad un $k\%$ equivale a calcular el $(100+k)\%$ de dicha cantidad.

Disminuir una cantidad un $k\%$ equivale a calcular el $(100-k)\%$ de dicha cantidad.

Ejemplo 13:
El precio de la gasolina ha subido un 2 %. Si costaba 0,95 € el litro, ¿cuánto costará ahora?

Tenemos que aumentar la cantidad 0,95 en un 2 %, y esto equivale, según la teoría anterior, a calcular el 102 % de dicha cantidad, es decir:

$$\frac{0,95 \cdot 102}{100} = \frac{96,9}{100} = 0,969$$

Por tanto, el litro de gasolina cuesta ahora 0,969 €, o lo que es lo mismo, casi 97 céntimos de euro.

Ejemplo 14:
Una cámara de vídeo cuesta 650 €, pero el vendedor me hace una rebaja del 20 %. ¿Cuánto tengo que pagar?

Ahora tenemos que disminuir la cantidad 650 en un 20 %, y esto equivale, según la teoría anterior, a calcular el 80 % de dicha cantidad, es decir:

$$\frac{650 \cdot 80}{100} = \frac{52000}{100} = 520$$

Por tanto, tendré que pagar 520 €.