1. Sistema de numeración decimal

Como ya sabes, el **sistema de numeración decimal** utiliza diez cifras o dígitos distintos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Además, es un **sistema posicional** porque cada cifra o dígito tiene un valor según la posición en el número.

Ejemplo 1:
El número 854320104 se descompone de la siguiente manera en sus órdenes de unidades:
8 centenas de millón, 5 decenas de millón, 4 unidades de millón, 3 centenas de millar, 2 decenas de millar, 0 unidades de millar, 1 centena, 0 decenas y 4 unidades.

2. Aproximación de números naturales

Aproximar un número es sustituirlo por otro próximo a él. Podemos hacerlo de dos formas: por **truncamiento** o por **redondeo**.

2.1. Aproximación por truncamiento

Truncar un número a un cierto orden consiste en sustituir por ceros las cifras de los órdenes inferiores a dicho orden.

Ejemplo 2:
Para truncar o aproximar por truncamiento a las decenas de millar el número 92145874 sustituimos por ceros todos aquellos dígitos posteriores al que corresponde a las decenas de millar (es decir, a partir del primer 4). Así pues el bloque formado por las cifras finales 5874 los sustituimos por ceros, con lo que la aproximación por truncamiento a las decenas de millar queda de la forma 92140000

2.2. Aproximación por redondeo

Para **redondear** un número a un cierto orden nos fijamos en la cifra del orden siguiente y procedemos de la siguiente manera:

- Si la cifra es mayor o igual que 5, sumamos una unidad a la cifra que estamos redondeando.
- Si la cifra es menor que 5, mantenemos la cifra como está.

Posteriormente, se trunca el número obtenido

Ejemplo 3:
Para redondear a las unidades de millar el número 92145874 nos fijamos en la cifra del orden siguiente, es decir, en la de las centenas, que es un 8. Como $8>5$, entonces le sumamos uno a la cifra de las unidades de millar: $5+1=6$ y posteriormente a ella truncamos, es decir, escribimos ceros. Por tanto el redondeo a las unidades de millar queda de la forma 92146000.

Si tenemos que redondear el mismo número 92145874 a las centenas de millar volvemos a fijarnos en la cifra del orden siguiente, es decir, en la de las decenas de millar, que es un 4. Como $4<5$, mantenemos la cifra de las centenes de millar como está y a continuación truncamos. Así, el redondeo a las centenas de millar de 92145874 es 92100000.

3. Propiedades de las operaciones con números naturales

3.1. Propiedades de la suma y la multiplicación o producto

- **Conmutativa**. El orden de los sumandos no altera la suma. El orden de los factores no altera el producto.

$$a+b=b+a \quad ; \quad a\cdot b=b\cdot a$$

- **Asociativa**. El orden en que se haga más de una suma o más de un producto no afecta al resultado.

$$(a+b)+c=a+(b+c) \quad ; \quad (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$$

- **Distributiva de la multiplicación respecto de la suma.** La multiplicación de un número por una suma es igual a la suma de los productos de ese número por cada uno de los sumandos. Es más fácil verla escrita simbólicamente:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

Nota: observa que, a partir de ahora, no utilizaremos el símbolo $\times$ para la multiplicación o el producto sino que utilizaremos simplemente un "puntito". Así, ya no escribiremos $3\times 4=12$, sino $3\cdot 4=12$.

Ejemplo 4:

- **Conmutativa**. $12+25=25+12=37$; $9\cdot 7=7\cdot 9=63$
- **Asociativa**. $\left.\begin{array}{l}(2+9)+7=11+7=18\\ 2+(9+7)=2+16=18\end{array}\right\}\Rightarrow(2+9)+7=2+(9+7)$; $\left.\begin{array}{l}(3\cdot 5)\cdot 2=15\cdot 2=30\\ 3\cdot(5\cdot 2)=3\cdot 10=30\end{array}\right\}\Rightarrow(3\cdot 5)\cdot 2=3\cdot(5\cdot 2)$
- **Distributiva**. $\left.\begin{array}{l}4\cdot(9+6)=4\cdot 15=60\\ 4\cdot 9+4\cdot 6=36+24=60\end{array}\right\}\Rightarrow 4\cdot(9+6)=4\cdot 9+4\cdot 6$

3.2. Propiedades de la resta o diferencia y de la división

- En una resta el sustraendo más la diferencia es igual al minuendo.

$$b+(a-b)=a$$

- En una división el dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto. Además, el resto tiene que ser menor que el divisor.

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \cline{2-2} r & c \end{array} \quad \Rightarrow \ D=d\cdot c+r \ ; \ r<d$$

Ejemplo 5:

La propiedad mencionada de la resta sirve para comprobar que es correcta: $158-76=82$ es correcta porque $76+82=158$

Un ejemplo de la propiedad de la división de dos números puede ser el siguiente:

$$\begin{array}{l|l} 158 & 6 \\ \cline{2-2} \ \ 38 & 26 \\ \quad 2 & \end{array} \quad \Rightarrow 158=6\cdot 26+2$$

. Además el resto es menor que el divisor: $2<6$

4. Potencias de números naturales

Una **potencia** es una forma abreviada de escribir una multiplicación de factores iguales:

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{veces}}$$

El número a recibe el nombre de **base** de la potencia y es el factor que se repite.
El número n se llama **exponente** e indica el número de veces que se repite la base.

Ejemplo 6:

$3^5=3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=9\cdot 3\cdot 3\cdot 3=27\cdot 3\cdot 3=81\cdot 3=243$ (se lee "tres a la quinta" o "tres elevado a cinco").

$12^2=12\cdot 12=144$ (se lee "doce al cuadrado" o "doce elevado a dos").

$7^3=7\cdot 7\cdot 7=49\cdot 7=343$ (se lee "siete al cubo" o "siete elevado a tres").

Como habrás observado las potencias de exponente 2 se leen "al cuadrado" y las de exponente 3 se leen "al cubo". Esto es porque la potencia de exponente dos, a^2, representa el área de un cuadrado cuyo lado mide a; y la de exponente tres, a^3, el volumen de un cubo cuya arista o lado mide a.

5. Potencias de base 10. Descomposición polinómica de un número

5.1. Potencias de base 10

Una **potencia de base 10 y exponente un número natural** es igual a la unidad seguida de tantos ceros como indica su exponente.

Ejemplo 7:

$$10^6 = \underbrace{10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10}_{\text{6 veces 10}} = 1\underbrace{000000}_{\text{6 ceros}}$$

$10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10 = 1000000000000 = 10^{12}$ (un billón = un millón de millones).

5.2. Descomposición polinómica de un número

La **descomposición polinómica** de un número es igual a la suma de los productos de sus cifras por la potencia de base 10 correspondiente a su orden.

Ejemplo 8:

La descomposición polinómica del número 2435897 ("dos millones cuatrocientos treinta y cinco mil ochocientos noventa y siete") es la siguiente:

$$2435897 = 2\cdot1000000 + 4\cdot100000 + 3\cdot10000 + 5\cdot1000 + 8\cdot100 + 9\cdot10 + 7 =$$
$$= 2\cdot10^6 + 4\cdot10^5 + 3\cdot10^4 + 5\cdot10^3 + 8\cdot10^2 + 9\cdot10 + 7$$

Su lectura, como no podía ser de otra forma, en términos de orden de unidades ahora queda clara: "dos millones, cuatro centenas de millar, tres decenas de millar, cinco unidades de millar, ocho centenas, nueve decenas y siete unidades".

6. Operaciones con potencias

6.1. Producto y división de potencias de la misma base

El **producto de dos o más potencias de la misma base** es igual a la base elevada a la suma de los exponentes.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

La **división de dos potencias de la misma base** es igual a la base elevada a la resta o diferencia de los exponentes.

$$a^n : a^m = a^{n-m} \quad ; \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Observación importante: la división o el cociente se representa indistintamente con *dos puntos* o con *una línea* que separa al dividendo (arriba) del divisor (abajo). Esta forma de escribir es la habitual cuando se trabaja con fracciones.

Ejemplo 9:

$$5^4\cdot5^3 = \underbrace{5\cdot5\cdot5\cdot5}_{\text{4 veces}}\cdot\underbrace{5\cdot5\cdot5}_{\text{3 veces}} = 5^{4+3} = 5^7 \quad ; \quad 6^5\cdot6^3\cdot6^2 = 6^{5+3+2} = 6^{10}$$

$$8^7 : 8^5 = (8\cdot8\cdot8\cdot8\cdot8\cdot8\cdot8):(8\cdot8\cdot8\cdot8\cdot8) = 8^{7-5} = 8^2$$

Quizá este último ejemplo quede más intuitivo si lo vemos utilizando la línea que separa el dividendo del divisor:

$$\frac{8^7}{8^5} = \frac{\cancel{8}\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{8}\cdot8\cdot8}{\cancel{8}\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{8}} = 8\cdot8 = 8^2 \Rightarrow \frac{8^7}{8^5} = 8^{7-5} = 8^2$$ (un 8 de arriba se tacha con un 8 de abajo porque $8:8 = \frac{8}{8} = 1$).

6.2. Potencias de exponente 1 y 0

Una potencia de exponente uno es igual a la base: $a^1 = a$. Por ejemplo:

$$3^1 = 3 \ ; \ 25^1 = 25 \ ; \ 13^5 : 13^4 = 13^{5-4} = 13^1 = 13$$

Una potencia de exponente cero es igual a uno: $a^0 = 1$. Por ejemplo:

$$2^0 = 1 \ ; \ 19^0 = 1 \ ; \ 7^9 : 7^9 = 7^{9-9} = 7^0 = 1$$

6.3. Potencia de una potencia

Para **elevar una potencia a otra potencia** se mantiene la misma base y se multiplican los exponentes.

$$\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}$$

Ejemplo 10:

$\left(2^4\right)^3 = 2^4\cdot 2^4\cdot 2^4 = 2^{4+4+4} = 2^{4\cdot 3} = 2^{12}$; $\left(7^5\right)^4 = 7^5\cdot 7^5\cdot 7^5\cdot 7^5 = 7^{5+5+5+5} = 7^{5\cdot 4} = 7^{20}$

6.4. Potencia de un producto y de un cociente

La **potencia de un producto** es igual al producto de las potencias

$$\left(a\cdot b\right)^n = a^n\cdot b^n$$

La **potencia de un cociente o división** es igual al cociente o división de las potencias.

$$\left(a:b\right)^n = a^n : b^n \;\; ; \;\; \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplo 10:

Podemos expresar la potencia de un producto como producto de potencias: $\left(3\cdot 2\right)^4 = 3^4\cdot 2^4$. Observa que el resultado es el mismo: $\left(3\cdot 2\right)^4 = 6^4 = 6\cdot 6\cdot 6\cdot 6 = 36\cdot 6\cdot 6 = 216\cdot 6 = 1296$; $3^4\cdot 2^4 = \left(3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\right)\cdot\left(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\right) = 81\cdot 16 = 1296$

También podemos, moviéndonos de derecha a izquierda en las propiedades anteriores, expresar operaciones con una sola potencia y luego calcular: $21^4 : 7^4 = \left(21:7\right)^4 = 3^4 = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 81$; $2^5\cdot 5^5 = \left(2\cdot 5\right)^5 = 10^5 = 100000$

7. Raíz cuadrada

7.1. Raíz cuadrada exacta

La **raíz cuadrada exacta** de un número a es otro número b tal que al elevarlo al cuadrado, obtenemos el número a.

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$$

$\sqrt{\;}$ es símbolo de la raíz. El **radicando** es el número que está dentro de la raíz. Se dice que b es la **raíz cuadrada** de a.

Ejemplo 11:

Un número b que es la raíz cuadrada exacta de un número a se dice que es un cuadrado perfecto. Los diez primeros cuadrados perfectos son 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 y 100. Comprobémoslo:

$\sqrt{1} = 1$, pues $1^2 = 1$

$\sqrt{4} = 2$, pues $2^2 = 4$

$\sqrt{9} = 3$, pues $3^2 = 9$

$\sqrt{16} = 4$, pues $4^2 = 16$

$\sqrt{25} = 5$, pues $5^2 = 25$

$\sqrt{36} = 6$, pues $6^2 = 36$

$\sqrt{49} = 7$, pues $7^2 = 49$

$\sqrt{64} = 8$, pues $8^2 = 64$

$\sqrt{81} = 9$, pues $9^2 = 81$

$\sqrt{100} = 10$, pues $10^2 = 100$

7.2. Raíz cuadrada entera

Si el radicando no es un cuadrado perfecto, la raíz cuadrada es entera. La **raíz cuadrada entera** de un número a es el mayor número b cuyo cuadrado es menor que a. El resto de la raíz entera es la diferencia entre el radicando a y el cuadrado de la raíz entera b.

$$\text{Resto} = a - b^2$$

Ejemplo 12:

La raíz cuadrada de 75 no es exacta, porque no hay ningún número natural cuyo cuadrado sea 75 (es decir, 75 no es un cuadrado perfecto). Pero como $8^2 = 64$ y $9^2 = 81$, decimos que la raíz cuadrada entera de 75 es 8 con un resto igual a 11, porque $75 - 64 = 11$. En realidad, la raíz cuadrada de 75, $\sqrt{75}$, es un número decimal situado entre 8 y 9. Puedes comprobar con tu calculadora que $\sqrt{75} = 8,660254038\ldots$

Observación de interés. Si un número no es un cuadrado perfecto, su raíz cuadrada siempre es un número decimal con infinitas cifras decimales.

7. Operaciones combinadas con números naturales

Cuando en una expresión aparecen operaciones de suma, resta, multiplicación y división el orden en que se deben realizar las operaciones es el siguiente (jerarquía de las operaciones).

1º. Las operaciones que hay entre paréntesis y corchetes.

2º. Se calculan las potencias y las raíces, si las hubiera.

3º. Las multiplicaciones y las divisiones, de izquierda a derecha.

4º. Las sumas y las restas, de izquierda a derecha.

Ejemplo 13:

Vamos a realizar algunas operaciones combinadas con números naturales.

- $32 + 8 \cdot 40 - 10 \cdot 7$
  $32 + 8 \cdot 40 - 10 \cdot 7 = 32 + 320 - 70 = 352 - 70 = 282$
  ¡Ojo!, no se hace así: $32 + 8 \cdot 40 - 10 \cdot 7 = 40 \cdot 40 - 10 \cdot 7 = 160 - 10 \cdot 7 = 150 \cdot 7 = 1050$ (resultado incorrecto).
- $21 + 13 \cdot (6 - 2 \cdot 2)$
  $21 + 13 \cdot (6 - 2 \cdot 2) = 21 + 13 \cdot (6 - 4) = 21 + 13 \cdot 2 = 21 + 26 = 47$
  ¡Ojo!, no se hace así: $21 + 13 \cdot (6 - 2 \cdot 2) = 34 \cdot (4 \cdot 2) = 34 \cdot 8 = 272$ (resultado incorrecto).
- $11 \cdot [36 + 4 - 2 \cdot (24 : 3)]$
  $11 \cdot [36 + 4 - 2 \cdot (24 : 3)] = 11 \cdot [36 + 4 - 2 \cdot 8] = 11 \cdot [36 + 4 - 16] = 11 \cdot [40 - 16] = 11 \cdot 24 = 264$
- $12 + (11 - 8)^3 : \sqrt{9} + 8 \cdot (10 - 2 \cdot 4) + 2^3$
  $12 + (11 - 8)^3 : \sqrt{9} + 8 \cdot (10 - 2 \cdot 4) + 2^3 = 12 + 3^3 : 3 + 8 \cdot (10 - 8) + 2^3 = 12 + 27 : 3 + 8 \cdot 2 + 8 =$
  $= 12 + 9 + 16 + 8 = 21 + 16 + 8 = 37 + 8 = 45$

¡Importante!

Observa como en cada uno de los ejemplos anteriores, se ha respetado escrupulosamente la jerarquía de las operaciones. Si no respetas la jerarquía, no operarás bien. Así que practica mucho con ejercicios de operaciones y respeta la jerarquía. No inventes tú la forma de operar, pues lo harás de manera incorrecta. Las Matemáticas son un lenguaje, y tiene sus reglas. De la misma manera que cualquier lengua escrita tiene unas reglas ortográficas y gramaticales muy precisas.