1. Números enteros

Hay situaciones de la vida cotidiana que no pueden expresarse solamente con números naturales. En ellas usamos otro tipo de números, los ***números enteros***. Si la cantidad expresada por un número entero está por debajo de cero, el número entero correspondiente está precedido de un signo "menos". Estos son los ***números negativos***.

Así pues, el conjunto de los números enteros, que se designa con la letra $\mathbb{Z}$, está formado por los números enteros positivos, el número cero y los números enteros negativos.

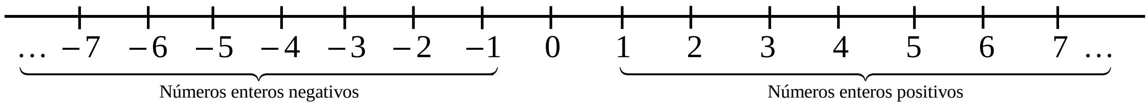
$$\mathbb{Z}=\{\ldots,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,\ldots\}$$

Con los números negativos podemos expresar abreviadamente cantidades que con los números naturales nos era imposible hacerlo. Así por ejemplo "siete grados bajo cero" lo podemos escribir $-7^{\circ}\mathrm{C}$, o "quince metros bajo el nivel del mar" lo podemos expresar mediante -15 m.

1.1. Representación en la recta numérica

Los números enteros se representan ordenados en la recta numérica, de la siguiente forma:

- El número cero, 0, divide a la recta en dos partes iguales.
- Fijamos el número uno, 1, a la derecha del cero y elegimos como unidad su distancia al cero.
- Desplazamos dicha unidad a la derecha del cero, para representar los enteros positivos, y a la izquierda del cero, para representar los enteros negativos.



1.2. Valor absoluto de un número entero

El ***valor absoluto*** de un número entero es la distancia, en unidades, que le separa del cero en la recta numérica. La forma de representar el valor absoluto es mediante dos barras: $|\ |$. Como una distancia es siempre positiva, el valor absoluto de un número positivo será el mismo número; y el valor absoluto de un número negativo será el mismo número sin su signo. El valor absoluto de cero es cero, $|0|=0$, porque la distancia del cero al cero es cero unidades.

Por ejemplo: $|9|=9$, $|-3|=3$. Lo anterior quiere decir que la distancia del 9 al 0 son 9 unidades y que la distancia del -3 al cero son -3 unidades.

1.3. Opuesto de un número entero

Decimos que dos números enteros son ***opuestos*** cuando están situados a la misma distancia del cero. Así, el opuesto de un número entero a es $-a$, y viceversa. Además de "*menos* a", $-a$ también se lee "*opuesto de* a".

Claramente el valor absoluto de dos números opuestos es el mismo: $|a|=|-a|$. Además, la suma de ambos es el número cero: $a+(-a)=-a+a=a-a=0$. Esto ya da una idea de que restar es "*sumar el opuesto*".

2. Comparación de números enteros

- Cualquier número entero positivo es mayor que cualquier número entero negativo.
- De dos números enteros positivos, es mayor el que tiene mayor valor absoluto.
- De dos números enteros negativos es mayor el que tiene menor valor absoluto.

En general, un número es menor que otro si el primero está situado a la izquierda del segundo en la recta numérica. Para comparar números enteros usaremos los símbolos "*menor que*" $(<)$ y "*mayor que*" $(>)$.

Veamos unos ejemplos: $4<7$ (4 menor que 7), $-5<-3$ (-5 menor que -3), $-6>-9$ (-6 mayor que -9), $1>-4$ (1 mayor que -4), $0>-7$ (0 mayor que -7), $-2<0$ (-2 menor que 0).

3. ¿Cómo se suman y se restan números enteros?

Es más fácil verlo con algunos ejemplos que explicarlo con palabras.

Ejemplo 1: $8+3-7+5-4$ a) Sumo los números positivos: $8+3+5=16$ b) Sumo los números negativos: $7+4=11$ c) Luego se resta: $16-11=5$ (observa que el resultado es, en este caso, positivo). Por cierto: $16-11=-11+16=5$	**Ejemplo 2:** $-6+5-4+8-9$ a) Sumo los números positivos: $5+8=13$ b) Sumo los números negativos: $6+4+9=19$ c) Luego se resta: $13-19=-6$ (observa que el resultado es ahora negativo porque 19 es mayor que 13). Por cierto: $13-19=-19+13=-6$
Los matemáticos profesionales lo hacen en una sola línea, dando un par de pasos, separados por el signo igual: $8+3-7+5-4=16-11=5$ $-6+5-4+8-9=13-19=-6$ ***¡Y así es como nos debemos de acostumbrar a hacerlo a partir de ahora!***	

Hay otra forma de hacer las operaciones anteriores: se procede operando siempre de izquierda a derecha. Fíjate:

Ejemplo 1: $8+3-7+5-4=11-7+5-4=$ $=4+5-4=9-4=5$	**Ejemplo 2:** $-6+5-4+8-9=-1-4+8-9=$ $=-5+8-9=3-9=-6$

Elige la forma que más te guste. Son equivalentes. ¡Pero no te equivoques nunca! ☺

3.1 ¿Y si hay paréntesis?

Pues se hace primero la operación que hay entre paréntesis y luego se procede como antes. Veamos otro par de ejemplos.

Ejemplo 3: $9-(2-7+3)+(-2+6)=$ $=9-(-2)+(4)=9+2+4=15$	**Ejemplo 4:** $12+(8-15)-(5+8)=$ $=12+(-7)-(13)=12-7-13=12-20=-8$

Observa que un **menos** delante de un paréntesis cambia el signo de "lo que hay dentro" del mismo. Sin embargo, un **más** delante del paréntesis deja "lo que hay dentro" del mismo tal y como estaba.

Hay otra forma de hacerlo y tiene que ver con lo que se ha dicho en el párrafo anterior. Se puede suprimir directamente cualquier paréntesis teniendo en cuenta que:

- ✓ Si está precedido del signo **más** los signos interiores no varían.
- ✓ Si está precedido del signo **menos** se cambian los signos interiores.

Ejemplo 3: $9-(2-7+3)+(-2+6)=$ $=9-2+7-3-2+6=22-7=15$	**Ejemplo 4:** $12+(8-15)-(5+8)=$ $=12+8-15-5-8=20-28=-8$

Elige la forma que más te guste. Son equivalentes. Pero te digo lo mismo que antes: ¡no te equivoques nunca! ☺

Veamos, finalmente, otro ejemplo más un poco más largo. Ahora con corchetes:

Ejemplo 5: $[10-(14-21)]-[5-(17-11+6)]=$ $=[10-(-7)]-[5-(23-11)]=[10+7]-[5-12]=17-[-7]=17+7=24$ **¡Despacito y buena letra! Así llegarás lejos**

4. ¿Cómo se multiplican y se dividen números enteros?

El producto o multiplicación se notará con un punto ($\cdot$). A veces incluso no se pone nada. Por ejemplo: $2(3+5)=2\cdot 8=16$. Para denotar la división se utilizan dos puntos ($:$). Pero antes de nada recordemos la **regla de los signos**:

Multiplicación		División	
Regla	**Ejemplo**	**Regla**	**Ejemplo**
$(+)\cdot(+)=+$	$2\cdot 5=10$	$(+):(+)=+$	$24:6=4$
$(-)\cdot(-)=+$	$-3\cdot(-4)=12$	$(-):(-)=+$	$-36:(-9)=4$
$(+)\cdot(-)=-$	$6\cdot(-5)=-30$	$(+):(-)=-$	$18:(-3)=-6$
$(-)\cdot(+)=-$	$-9\cdot 4=-36$	$(-):(+)=-$	$(-12):4=-3$
Observa que, si no es necesario, no se escribe el paréntesis. Además, a los números positivos no es necesario ponerles delante el signo $+$. ¡Esta propiedad se conoce como **economía del lenguaje matemático**!			

Ambas operaciones con frecuencia aparecen mezcladas. En este caso se efectúan **de izquierda a derecha** teniendo en cuenta las reglas anteriores:

Ejemplo 6:

$(-2)\cdot(-5)\cdot 4:2\cdot(-3)=$

$=10\cdot 4:2\cdot(-3)=40:2\cdot(-3)=20\cdot(-3)=-60$

Ejemplo 7:

$3\cdot(-4)\cdot(-1):(-2)\cdot(-7)=$

$=-12\cdot(-1):(-2)\cdot(-7)=12:(-2)\cdot(-7)=$

$=(-6)\cdot(-7)=42$

5. Operaciones combinadas

Normalmente, las cuatro operaciones anteriores (suma, resta, multiplicación y división), aparecen combinadas. Para no equivocarte debes seguir siempre, y ordenadamente, esta **jerarquía**:

1. Corchetes y paréntesis.
2. Multiplicaciones y divisiones (aquí se incluyen las potencias y las raíces cuadradas, si las hubiera).
3. Sumas y restas.

Hay que tener en cuenta que las operaciones del mismo nivel (multiplicaciones y divisiones por un lado, y sumas y restas por otro) se realizan siempre **de izquierda a derecha**.

Ejemplo 8:

$(-2)\cdot(5-9)+6\cdot(3-5)=$

[primero los paréntesis]

$=(-2)\cdot(-4)+6\cdot(-2)=$

[ahora las multiplicaciones]

$=8+(-12)=8-12=-4$

[al final hemos realizado las sumas y restas]

Ejemplo 9:

$5+28:(-7)-(-6)\cdot[23-5\cdot(9-4)]=$

$=5+28:(-7)-(-6)\cdot[23-5\cdot 5]=$

$=5+28:(-7)—6\cdot[23-25]=$

$=5+28:(-7)-(-6)\cdot(-2)=$

$=5+(-4)-12=5-4-12=5-16=-11$

¿Que las operaciones son un poco más largas? No pasa nada. Con paciencia y sin prisa, siguiendo la jerarquía, todo debe de salir bien. Insisto: no tengas prisa y acabarás antes. ☺

Ejemplo 10:

$5\cdot(10-2\cdot 3)+[9\cdot 2-8\cdot 3-(1+6\cdot 4-5)+3\cdot 8]-3\cdot(1+2)=$

$=5\cdot(10-6)+[18-24-(1+24-5)+24]-3\cdot 3=5\cdot 4+[18-24-20+24]-3\cdot 3=$

$=20+(-2)-9=20-2-9=20-11=9$