1. Fracciones

Una **fracción** es una expresión del tipo $\frac{a}{b}$, donde a y b son números naturales llamados **numerador** y **denominador**, respectivamente.

1.1. Interpretación de una fracción

a) **Fracción como parte de la unidad o de un todo.** Su denominador representa el número de partes iguales en que se divide la unidad (o un todo) y su numerador el número de partes que se toman.

b) **Fracción como cociente de dos números**. Para hallar su valor, se divide el numerador entre el denominador.

c) **Fracción como operador de un número**. Para calcular su valor, se multiplica el numero por el numerador y se divide entre el denominador.

Ejemplo 1:

En los siguientes enunciados puedes ver con claridad la interpretación de una fracción, tal y como se ha descrito anteriormente.

a) Una finca se ha dividido en 7 de partes, de las cuales 5 se destinarán a la construcción de viviendas y las 2 restantes a espacios verdes.

El enunciado anterior se puede escribir abreviadamente diciendo que $\frac{5}{7}$ de la finca se destinan a la construcción de viviendas y $\frac{2}{5}$ a espacios verdes. En este caso la fracción se interpreta como parte de la unidad.

b) Repartimos 36 euros entre 9 personas.

En este caso la fracción se interpreta como un cociente de dos números: $\frac{36}{9}=36:9=4$, lo que quiere decir que a cada persona le corresponden 4 euros.

c) En un instituto han aprobado $\frac{4}{5}$ de sus 380 alumnos.

Esto quiere decir que han aprobado $\frac{4\cdot 380}{5}=\frac{1520}{5}=1520:5=304$ alumnos.

1.2 Fracciones propias e impropias

Una fracción es **propia** si su numerador es menor que su denominador. Es **impropia** si numerador es mayor que su denominador. Si el numerador y el denominador son iguales la fracción es igual a la unidad.

Cuando una fracción es impropia se puede expresar como un número natural más una fracción propia.

Ejemplo 2:

La fracción $\frac{5}{9}$ es propia y la fracción $\frac{40}{9}$ es impropia. Tal y como se ha comentado antes en la teoría, la fracción $\frac{40}{9}$, al ser impropia, se puede expresar como suma de un número natural más una fracción impropia. ¿Cómo hacemos esto? Es muy sencillo. Buscamos el múltiplo de 9 que sea inferior y más cercano a 40. En este caso es $9\cdot 4=36$, porque $9\cdot 5=45$ también es múltiplo de 9, pero es mayor que 40. Observa ahora el truco:

$$\frac{40}{9}=\frac{36+4}{9}=\frac{36}{9}+\frac{4}{9}=36:9+\frac{4}{9}=4+\frac{4}{9}$$

Uso de la calculadora científica.

Si introduces en tu calculadora científica la fracción $\frac{40}{9}$ ($40\lrcorner 9$) haciendo uso de la tecla **ab/c** y luego pulsas la tecla **=** obtendrás como resultado en pantalla $4\lrcorner 4\lrcorner 9$, cuyo significado es $4+\frac{4}{9}$, es decir, la calculadora expresa fracciones impropias como un natural más una fracción propia. Si ahora pulsas la combinación **SHIFT ab/c**, volverás otra vez a la fracción original $40\lrcorner 9$.

2. Fracciones equivalentes

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son **equivalentes**, y se escribe $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ cuando representan la misma cantidad, se interprete la fracción como parte de la unidad, como cociente de dos números o como operador de un número.

Ejemplo 3:

Las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$ son equivalentes porque representan la misma cantidad ya sea porque:

- Representan la misma parte de la unidad: da igual tomar tres partes de cuatro que seis partes de ocho (ver figura).
- Como cociente de dos números ambas representan el miso número, en este caso el número decimal $0,75$ porque $3:4=6:8=0,75$
- Como operador producen ambas el mismo efecto. Por ejemplo, $\frac{3}{4}$ de 20 es lo mismo que $\frac{6}{8}$ de 20:

$$\frac{3\cdot 20}{4}=\frac{60}{4}=60:4=15 \quad ; \quad \frac{6\cdot 20}{8}=\frac{120}{8}=120:8=15$$

2.1. Método para saber si dos fracciones son equivalentes

Hay un método sencillo para saber si dos fracciones son equivalentes:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$$

Gracias a este método podemos obtener fracciones equivalentes a una dada. Basta multiplicar (**amplificar o amplificación**) o dividir (**simplificar o simplificación**) el numerador y el denominador por el mismo número natural.

Ejemplo 4:

Podríamos haber comprobado que las fracciones del ejemplo 3 son equivalentes utilizando el método anterior:

$\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$ son equivalentes, es decir, $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$, porque $3\cdot 8=24=4\cdot 6$

Además podemos obtener más fracciones equivalente a las anteriores. Por ejemplo $\frac{6}{8}=\frac{6\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{18}{24}$, $\frac{6}{8}=\frac{6:2}{8:2}=\frac{3}{4}$, etcétera.

2.2. Reducción a común denominador

Reducir a común denominador dos o más fracciones consiste en obtener otras equivalentes con igual denominador. Para reducir fracciones a común denominador se siguen los siguientes pasos.

- Calculamos el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores de las fracciones dadas.
- Dividimos el mcm entre el denominador de cada fracción y el resultado obtenido se multiplica por el numerador y el denominador de la fracción.

De este modo las fracciones resultantes son equivalentes y tienen el mismo denominador. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 5:

Reducir a común denominador las fracciones $\frac{5}{8}$ y $\frac{9}{6}$.

Hallamos el mcm de 8 y 6. $\left.\begin{array}{l} 8=2^3 \\ 6=2\cdot 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$ mcm$(8\,,\,6)=2^3\cdot 3=24$

Como $24:8=3$, entonces $\frac{5}{8}=\frac{5\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{15}{24}$; y como $24:6=4$, entonces $\frac{9}{6}=\frac{9\cdot 4}{6\cdot 4}=\frac{36}{24}$

Observa que $\frac{15}{24}$ y $\frac{36}{24}$ son equivalentes, respectivamente, a $\frac{5}{8}$ y $\frac{9}{6}$, y ambas tienen el mismo denominador.

2.3. Fracción irreducible

Una fracción es **irreducible** si no se puede simplificar. Esto quiere decir que no existe ningún número natural distinto de 1 que sea simultáneamente divisor del numerador y del denominador, es decir:

$$\frac{a}{b} \text{ es irreducible } \Leftrightarrow \text{mcd}(a\ ,\ b)=1$$

Ejemplo 6:

Obtener la fracción irreducible de la fracción $\dfrac{60}{48}$.

Lo que se suele hacer es ir simplificando poco a poco, dividiendo numerador y denominador entre un divisor común conocido.

Así, como 60 y 48 son divisibles por 2, entonces $\dfrac{60}{48}=\dfrac{60:2}{48:2}=\dfrac{30}{24}$

Ahora como 30 y 24 vuelven a ser divisibles ambos por 2, tenemos $\dfrac{30}{24}=\dfrac{30:2}{24:2}=\dfrac{15}{12}$

Finalmente 15 y 12 no son ambos divisible por 2, pero sí lo son por 3. Entonces $\dfrac{15}{12}=\dfrac{15:3}{12:3}=\dfrac{5}{4}$

El proceso termina cuando numerador y denominador no tienen divisores comunes distintos de 1.

En este caso, por tanto, la fracción irreducible de $\dfrac{60}{48}$ es $\dfrac{5}{4}$.

Hay sin embargo un procedimiento general para calcular la fracción irreducible a una dada. Es el siguiente:

- Calculamos el mcd del numerador y del denominador de la fracción dada.
- Dividimos los dos términos de la fracción entre el mcd calculado.

Ejemplo 7:

Obtener la fracción irreducible de la fracción $\dfrac{60}{48}$ utilizando el método anterior.

Calculamos el mcd de 60 y 48: $\left.\begin{array}{l} 60=2^2\cdot 3\cdot 5 \\ 48=2^4\cdot 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{mcd}(60\ ,\ 48)=2^2\cdot 3=12$

Dividimos entre 12 el numerador y el denominador de la fracción para obtener la fracción irreducible: $\dfrac{60}{48}=\dfrac{60:12}{48:12}=\dfrac{5}{4}$

3. Comparación de fracciones

Para comparar dos o más fracciones se reducen todas a común denominador. Una vez hecho esto, será mayor la fracción que tenga mayor numerador. Veámoslo con un ejemplo

Ejemplo 8:

Ordena de menor a mayor las fracciones $\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{5}{6}$

Es fácil calcular el mínimo común múltiplo de los denominadores (¡hazlo!): mcm$(3\ ,\ 5\ ,\ 6)=30$.

Las fracciones equivalentes a las dadas, con el mismo denominador, en este caso 30, son:

$$\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 10}{3\cdot 10}=\frac{20}{30}\ ,\ \frac{3}{5}=\frac{3\cdot 6}{5\cdot 6}=\frac{18}{30}\ ,\ \frac{5}{6}=\frac{5\cdot 5}{6\cdot 5}=\frac{25}{30}$$

Si ordenamos estas últimas tenemos $\dfrac{18}{30}<\dfrac{20}{30}<\dfrac{25}{30}$.

Por tanto, las fracciones del principio quedan, ordenadas de menor a mayor de la forma: $\dfrac{3}{5}<\dfrac{2}{3}<\dfrac{5}{6}$

4. Suma y resta de fracciones

4.1. Fracciones con el mismo denominador

Para **sumar** (o **restar**) **fracciones con el mismo denominador**, se suman (o se restan) los numeradores y se mantiene el denominador. Finalmente, si es posible, se simplifica la fracción resultante.

Ejemplo 9:

a) $\frac{5}{6}+\frac{9}{6}=\frac{5+9}{6}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$ ¡hemos simplificado!

b) $\frac{25}{7}-\frac{12}{7}=\frac{25-12}{7}=\frac{13}{7}$ (este resultado no se puede simplificar más, es una fracción irreducible).

4.1. Fracciones con distinto denominador

Para **sumar** (o **restar**) **fracciones con distinto denominador** se procede de la siguiente manera:

- Se reducen todas ellas a común denominador.
- Se suman (o se restan) los numeradores, manteniendo el mismo denominador.

Finalmente, si es posible, se simplifica la fracción resultante.

Ejemplo 10:

Efectuar la siguiente operación $\frac{11}{18}+\frac{5}{6}-\frac{7}{15}$

Reducimos a común denominador: $\left.\begin{array}{l} 18=2\cdot 3^2 \\ 6=2\cdot 3 \\ 15=3\cdot 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$ mcm $(18\,,6\,,15)=2\cdot 3^2\cdot 5=90$. Entonces:

$\frac{11}{18}=\frac{11\cdot 5}{18\cdot 5}=\frac{55}{90}$; $\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 15}{6\cdot 15}=\frac{75}{90}$; $\frac{7}{15}=\frac{7\cdot 6}{15\cdot 6}=\frac{42}{90}$

Ahora operamos con las fracciones equivalentes que tienen el mismo denominador y simplificamos el resultado final:

$\frac{11}{18}+\frac{5}{6}-\frac{7}{15}=\frac{55}{90}+\frac{75}{90}-\frac{42}{90}=\frac{55+75-42}{90}=\frac{88}{90}=\frac{44}{45}$

5. Multiplicación y división de fracciones

5.1. Multiplicación de fracciones

Para multiplicar fracciones se multiplican sus numeradores y se multiplican sus denominadores.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Una vez realizada la multiplicación, si es posible, se simplifica el resultado hasta obtener la fracción irreducible.

Observa bien que el resultado de multiplicar dos fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores.

Ejemplo 11:

a) $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 6}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$ (observa que el resultado, $\frac{15}{24}$, se ha simplificado dividiendo entre 3, hasta obtener $\frac{5}{8}$).

b) $4\cdot\frac{5}{8}=\frac{4}{1}\cdot\frac{5}{8}=\frac{4\cdot 5}{1\cdot 8}=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$ (observa ahora que los números naturales se pueden escribir como fracciones de denominador igual a 1; de este modo ya resulta sencillo hacer la operación).

5.2. División de fracciones

La **fracción inversa** de una fracción $\frac{a}{b}$ es la fracción $\frac{b}{a}$. Al multiplicar dos fracciones inversas se obtiene como resultado la unidad: $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a\cdot b}{b\cdot a}=1$. En general dos números son inversos si al multiplicarlos se obtiene como resultado el número 1.

Pues bien, para **dividir dos fracciones** se multiplica la primera por la inversa de la segunda. Es decir:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Ejemplo 12:

a) $\frac{4}{5}:\frac{6}{11}=\frac{4}{5}\cdot\frac{11}{6}=\frac{4\cdot 11}{5\cdot 6}=\frac{44}{30}=\frac{22}{15}$

b) $\frac{3}{7}:9=\frac{3}{7}:\frac{9}{1}=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{9}=\frac{3\cdot 1}{7\cdot 9}=\frac{3}{63}=\frac{1}{21}$

6. Operaciones combinadas con fracciones

Para hacer operaciones combinadas con fracciones se sigue la misma jerarquía que se utilizaba al realizar operaciones combinadas con números naturales o con números enteros. Es decir, los pasos a seguir, y por este orden son los siguientes:

1. Realizamos las operaciones que hay dentro de los paréntesis y corchetes.
2. Calculamos las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.
3. Calculamos las sumas y restas de izquierda a derecha.

Ejemplo 13:

Realicemos un par de operaciones combinadas con fracciones.

a) $\frac{5}{14}+\left(1-\frac{7}{10}\right):\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)$

Solución:

$$\frac{5}{14}+\left(1-\frac{7}{10}\right):\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{5}{14}+\left(\frac{10}{10}-\frac{7}{10}\right):\left(\frac{10}{15}-\frac{3}{15}\right)=\frac{5}{14}+\frac{3}{10}:\frac{7}{15}=\frac{5}{14}+\frac{45}{70}=\frac{25}{70}+\frac{45}{70}=\frac{70}{70}=1$$

Debes intentar comprender todos y cada uno de los pasos que se han dado. Observa que primero hacemos las operaciones que van entre paréntesis (que son dos restas). Luego hacemos la división (¡antes que la suma!). Finalmente realizamos la suma y simplificamos el resultado obtenido.

b) $\left[\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{5}\right)\cdot 5-\frac{1}{10}\right]\cdot\frac{3}{4}-\frac{6}{5}$

Solución:

$$\left[\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{5}\right)\cdot 5-\frac{1}{10}\right]\cdot\frac{3}{4}-\frac{6}{5}=\left[\left(\frac{15}{10}-\frac{2}{10}\right)\cdot 5-\frac{1}{10}\right]\cdot\frac{3}{4}-\frac{6}{5}=\left[\frac{13}{10}\cdot\frac{5}{1}-\frac{1}{10}\right]\cdot\frac{3}{4}-\frac{6}{5}=\left[\frac{65}{10}-\frac{1}{10}\right]\cdot\frac{3}{4}-\frac{6}{5}=$$

$$=\frac{64}{10}\cdot\frac{3}{4}-\frac{6}{5}=\frac{192}{40}-\frac{6}{5}=\frac{192}{40}-\frac{48}{40}=\frac{144}{40}=\frac{18}{5}$$

Observa bien. Primero el paréntesis que hay dentro del corchete. Luego la multiplicación que queda dentro del corchete. A continuación la resta que queda dentro del corchete. Finalmente, y por ese orden, la multiplicación y la resta. ¡No puedes olvidar tampoco simplificar el resultado obtenido!