Examen de Matemáticas II – 2º de Bachillerato

1. Se considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y=k \\ y+3z=k \\ x-y+2z=0 \end{cases}$

   a) **[2 puntos]** Discútelo para los distintos valores de *k*.

   b) **[1 punto]** Resuélvelo, usando la regla de Cramer, para los valores de *k* en los que el sistema es compatible.

   c) **[1 punto]** Si las dos primeras ecuaciones representan una recta *r* y las dos últimas una recta *s*, interpreta geométricamente los resultados obtenidos (posición relativa de las rectas *r* y *s*).

2. Dados los planos $\pi_1 \equiv x-y+3=0$ y $\pi_2 \equiv 2x+y-z=0$, calcula:

   a) **[1 punto]** Las ecuaciones paramétricas de la recta *r* perpendicular al plano π_1 y que pasa por el punto $P(2,2,1)$.

   b) **[1 punto]** La ecuación general del plano π que pasa por el punto $A(1,1,-1)$ y que es perpendicular a la recta que determinan los planos π_1 y π_2.

   c) **[1 punto]** Las ecuaciones continuas de la recta *s* paralela a los planos π_1 y π_2 que pasa por el punto $B(2,2,3)$.

   d) **[1 punto]** El ángulo que forman los planos π_1 y π_2.

3. **[2 puntos]** Dados el punto $P(2,1,-1)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{-1}$, halla la distancia del punto P a la recta *r* de dos formas diferentes.

Problema para subir nota

4. **[2 puntos]** Halla la ecuación de la recta *s* que pasa por el punto $A(2,0,5)$, es paralela al plano $\pi \equiv x+5y+z=0$ y está contenida en el mismo plano que la recta $r \equiv x+1=y=\frac{z}{2}$.

Soluciones

1. Estudiemos el determinante de la matriz ampliada

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 3 & k \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & k-4 \\ 0 & 1 & 3 & k \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 & k-4 \\ 1 & 3 & k \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (18+4k+k-4)-(-6k+24+4-3k) = 14k-14$$

Como $14k-14=0 \Leftrightarrow k=1$, se tiene:

- Si $k \neq 1$, entonces $r(A|b)=4 \neq r(A)$, y en este caso el sistema es **incompatible**.
- Si $k=1$, entonces como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \Rightarrow r(A)=3=r(A|b)=n$, y el sistema es, en este caso, **compatible determinado**. Hallemos su solución. Eliminado la última ecuación y sustituyendo k por 1, el sistema queda de la forma $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y=1 \\ y+3z=1 \end{cases}$. Usando la regla de Cramer tenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-7}{-7} = 1 \ ; \ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-7}{-7} = 1 \ ; \ z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{0}{-7} = 0$$

Según lo anterior si $k=1$, las rectas r y s son secantes y se cortan en el punto $P(1,1,0)$, que es la solución del sistema. Sin embargo, si $k \neq 1$, las dos rectas no tienen puntos en común y pueden ser paralelas o cruzarse. Para saber qué ocurre se analizan los vectores directores de ambas: si son proporcionales las rectas son paralelas y si no lo son, las rectas se cruzan.

Vector director de r: $\vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (2j-k)-(2k-i) = i+2j-3k \Rightarrow \vec{u}=(1,2,-3)$

Vector director de s: $\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (2i+3j)-(k-3i) = 5i+3j-k \Rightarrow \vec{v}=(5,3,-1)$

Como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales las rectas r y s se cruzan.

2. a) La recta r perpendicular a π_1 que contiene a P, tiene como vector director un vector $\vec{u}$ perpendicular al plano π_1, que es $\vec{u}=(1,-1,0)$. Por tanto las ecuaciones paramétricas de r son: $r \equiv \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=1 \end{cases}$

b) La recta que determinan los planos π_1 y π_2 se obtiene resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambos. Llamando $z=\lambda$, dicha recta en forma paramétrica queda así: $\begin{cases} x=-1+(1/3)\lambda \\ y=2+(1/3)\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

Un vector perpendicular del plano que se pide será el vector de dirección de la recta anterior, es decir el vector $\vec{v}=(1,1,3)$. Por tanto el plano π es de la forma $\pi\equiv x+y+3z+D=0$ que, por pasar por $A(1,1,-1)$, ha de verificar que $1+1-3+D=0\Rightarrow D=1$, con lo que la ecuación del plano que se pide es $\pi\equiv x+y+3z+1=0$.

También se puede hacer directamente usando como vectores directores del plano que se pide, los vectores perpendiculares a los planos π_1 y π_2 (¿puedes razonar geométricamente por qué se puede hacer así?):

$$\pi\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow \pi\equiv(x-1+z+1)-(-2z-2-y+1)=0\Rightarrow \pi\equiv x+y+3z+1=0$$

c) La recta definida por los planos π_1 y π_2 ya hemos visto que viene dada por $\begin{cases} x=-1+(1/3)\lambda \\ y=2+(1/3)\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

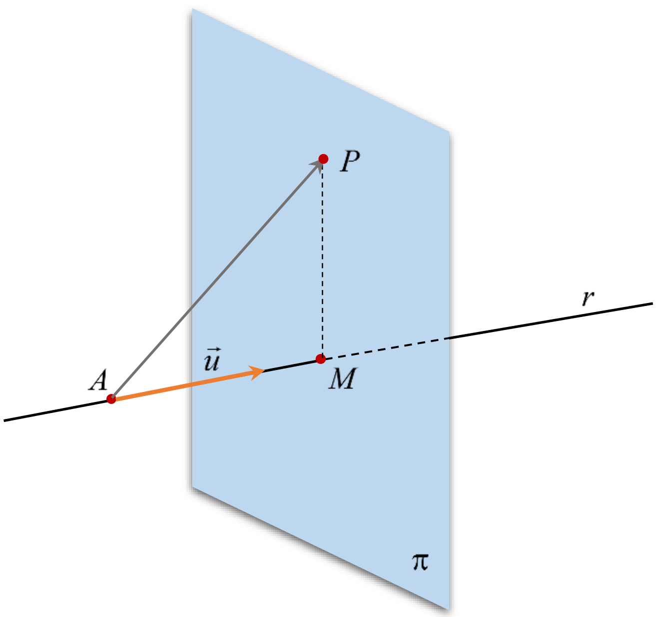
La recta *s*, por ser paralela a π_1 y π_2, será paralela a la recta que determinan ambos planos, luego su vector director es el vector $\vec{v}=(1,1,3)$, y por pasar por $B(2,2,3)$, sus ecuaciones paramétricas y continuas son:

$$s\equiv\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=3+3\lambda \end{cases}\Rightarrow s\equiv\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{3}$$

d) El ángulo α formado por los planos π_1 y π_2 es el mismo que forman dos vectores respectivamente perpendiculares a ellos. Ya hemos visto en el apartado a) que un vector perpendicular a π_1 es el vector $\vec{u}=(1,-1,0)$. Del mismo modo, un vector perpendicular a π_2 es el vector $\vec{w}=(2,1,-1)$. Por tanto:

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{w}|}{|\vec{u}||\vec{w}|}=\frac{|1\cdot 2+(-1)\cdot 1+0\cdot(-1)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{|2-1+0|}{\sqrt{2}\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{12}}\Rightarrow\alpha=73,22^{\circ}$$

3. Un vector director de *r* es $\vec{u}=(2,2,-1)$. El plano π perpendicular a *r* que pasa por $P(2,1,-1)$, tiene por ecuación: $\pi\equiv 2x+2y-z+D=0$. Como $P\in\pi$, entonces $4+2+1+D=0\Rightarrow D=-7$, con lo que la ecuación del plano π queda finalmente de la forma $\pi\equiv 2x+2y-z-7=0$. Este plano corta a la recta r en un punto que llamaremos *M*. La recta *r* tiene ecuaciones paramétricas $r\equiv\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=2\lambda \\ z=-2-\lambda \end{cases}$, con lo que el punto *M* es, para algún valor de λ, de la forma $M(1+2\lambda,2\lambda,-2-\lambda)$. Como $M\in\pi$:



$$2(1+2\lambda)+2(2\lambda)-(-2-\lambda)-7=0\Rightarrow 2+4\lambda+4\lambda+2+\lambda-7=0\Rightarrow 9\lambda=3\Rightarrow\lambda=\frac{3}{9}\Rightarrow\lambda=\frac{1}{3}$$

Por tanto, el punto de corte es $M=\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3},-\frac{7}{3}\right)$ y entonces $\overrightarrow{PM}=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)$. La distancia pedida es

$$d(P,r)=d(P,M)=\left|\overrightarrow{PM}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{16}{9}}=\sqrt{\frac{18}{9}}=\sqrt{2}\text{ u.m}$$

Otra forma de hacerlo es usando la fórmula de la distancia de un punto a una recta: $d(P,r)=\dfrac{\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{u}\right|}{|\vec{u}|}$.

En la fórmula anterior A es un punto cualquiera de la recta. En este caso $A(1,0,2)$, con lo que $\overrightarrow{AP}=(2-1,1-0,-1-(-2))=(1,1,1)$. El vector $\vec{u}$ es el vector director de la recta: $\vec{u}=(2,2,-1)$ y $\overrightarrow{AP}\times\vec{u}$ es el producto vectorial de $\overrightarrow{AP}$ y $\vec{u}$, cuyo valor es:

$$\overrightarrow{AP}\times\vec{u}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=(-i+2j+2k)-(2k-j+2i)=-3i+3j\Rightarrow\overrightarrow{AP}\times\vec{u}=(-3,3,0)$$

Por tanto:

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{u}\right|}{|\vec{u}|}=\frac{|(1,1,1)\times(2,2,-1)|}{|(2,2,-1)|}=\frac{|(-3,3,0)|}{|(2,2,-1)|}=\frac{\sqrt{9+9+0}}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{9}}=\sqrt{2}\text{ u.m}$$

4. La recta pedida es de la forma $s\equiv\begin{cases} x=2+a\lambda \\ y=b\lambda \\ z=5+c\lambda \end{cases}$ en la que desconocemos su vector director $\vec{u}=(a,b,c)$.

Por ser *s* paralela al plano π, su vector director $\vec{u}$ es perpendicular al vector perpendicular al plano π: $\vec{v}=(1,5,1)$, es decir: $(a,b,c)\cdot(1,5,1)=0\Rightarrow a+5b+c=0$ **(1)**.

Si *s* está contenida en el mismo plano que la recta *r*, sucederá que, o bien es paralela a *r* (cosa que no es posible en este caso, ya que el vector de dirección de *r* no es perpendicular con el normal de π) o bien se cortan en un punto, con lo que el rango de la matriz $\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ ha de ser igual a 2.

Obsérvese que $A\in s\Rightarrow A(2,0,5)$, $B\in r\Rightarrow B(-1,0,0)$. Por tanto $\overrightarrow{AB}=(3,0,5)$.

Entonces: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}=0\Rightarrow(5a+6b)-(3c+5b)=0\Rightarrow 5a+b-3c=0$. **(2)**

Resolviendo el sistema formado por **(1)** y **(2)**, se obtiene:

$$\begin{cases} a+5b+c=0 \\ 5a+b-3c=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a+c=-5\lambda \\ 5a-3c=-\lambda \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=-2\lambda \\ b=\lambda \\ c=-3\lambda \end{cases}\Rightarrow\vec{u}=(-2b,b,-3b)$$

Tomando $b=1$ tenemos que $\vec{u}=(-2,1,-3)$, con lo que la recta que se pide es $s\equiv\begin{cases} x=2-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=5-3\lambda \end{cases}$