Examen de Matemáticas II – 2º de Bachillerato

1. **[2 puntos; 1 punto por apartado]** Resuelve las siguientes integrales indefinidas usando el método que consideres más adecuado.

   a) $\int xe^{2x}dx$ b) $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$

2. Dadas las funciones $f(x)=x^2-2x$ y $g(x)=x$

   a) **[1 punto]** Representa gráficamente la región comprendida entre las gráficas de las funciones f y g.

   b) **[1 punto]** Calcula el área de la región anterior.

3. **[3 puntos; 1,5 puntos por apartado]** Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones, el primero por el método de Gauss y el segundo usando el método matricial.

   a) $\begin{cases} -2x-2=y-3 \\ x+1=z \\ x-y-3z=-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x+y+z=0 \\ -x+2y+3z=4 \\ x-z=2 \end{cases}$

4. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Dada la siguiente ecuación matricial $ABX-I=2X$, en la que I es la matriz identidad de orden 3 y X es una matriz cuadrada de orden 3, se pide:

   a) **[1 punto]** Despeja la matriz X.

   b) **[1 punto]** Calcula la matriz X.

5. **[1 punto]** Resuelve la ecuación $\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2x+1 & x & 2x+1 \\ 2x-1 & 3x & 3x-2 \end{vmatrix}=0$.

Importante

En la obtención de la matriz inversa de una matriz, es obligatorio calcular explícitamente el determinante de la matriz dada, escribir su matriz adjunta y hacer el cálculo de la matriz inversa mediante la expresión de la fórmula correspondiente.

Soluciones

1. a) $\int xe^{2x}dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{2x}dx & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx =$

$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + C = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$

b) La factorización del polinomio $x^3 - x^2 - x + 1$ es $(x+1)(x-1)^2$. Descompongamos pues la fracción $\frac{3x+5}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2}$ en fracciones simples.

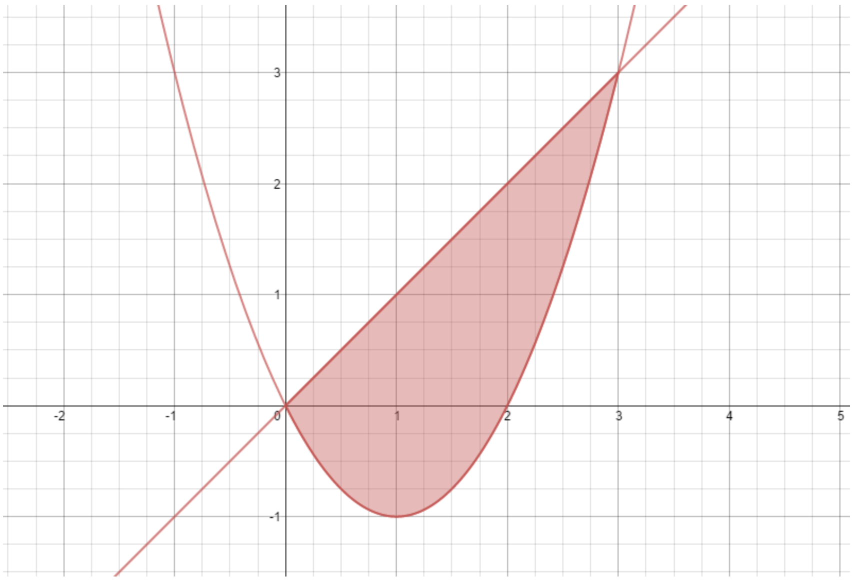
$$\frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}$$

Igualando los numeradores: $3x + 5 = A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)$.

Si $x = 1$, tenemos que $8 = 2C \Rightarrow C = 4$. Si $x = -1$, tenemos que $2 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$. Y si $x = 0$, tenemos que $5 = \frac{1}{2} - B + 4 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$. Por tanto: $\frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{1/2}{x+1} + \frac{-1/2}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2}$, es decir:

$$\int \frac{3x+5}{x^3 - x^2 - x + 1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx + 4\int \frac{1}{(x-1)^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{4}{x-1} + C$$

2. La representación de la región comprendida entre las gráficas de las funciones f y g es:



Calculemos la coordenada x o abscisa de los puntos de corte de ambas funciones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x = x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

De las dos funciones, la que está por encima es g, con lo que el área de la región será:

$$A = \int_0^3 \left(g(x) - f(x)\right)dx = \int_0^3 \left[x - \left(x^2 - 2x\right)\right]dx = \int_0^3 \left(-x^2 + 3x\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 =$$

$$= \left(-\frac{3^3}{3} + \frac{3\cdot 3^2}{2}\right) - 0 = -9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2}\text{uds}^2 = 4{,}5\,\text{uds}^2$$

3. a) $\begin{cases} -2x-2=y-3 \\ x+1=z \\ x-y-3z=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-y=-1 \\ x-z=-1 \\ x-y-3z=-4 \end{cases}$; usando el método de Gauss tenemos:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2f_2+f_1 \\ 2f_3+f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ f_3-3f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x-y=-1 \\ -y-2z=-3 \end{cases}$$

Llamando $z=\lambda$, es fácil deducir que $y=-2\lambda+3$, $x=\lambda-1$

b) $\begin{cases} -x+y+z=0 \\ -x+2y+3z=4 \\ x-z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B$

$$|A|=(2+3+0)-(2+1+0)=5-3=2;\ A^d=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(A^d\right)^t=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$$

4. $ABX-I=2X \Rightarrow ABX-2X=I \Rightarrow (AB-2I)X=I \Rightarrow X=(AB-2I)^{-1}I \Rightarrow X=(AB-2I)^{-1}$

Si llamamos $C=AB-2I$, entonces $X=C^{-1}$

$$C=AB-2I=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|C|=(0-3+0)-(0-2+3)=-3-1=-4;\ C^d=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{-1}=\frac{1}{|C|}\left(C^d\right)^t=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3/4 & -1/2 & -3/4 \\ 1/4 & -1/2 & -3/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$ Por tanto $X=\begin{pmatrix} -3/4 & -1/2 & -3/4 \\ 1/4 & -1/2 & -3/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$.

5. Si en el determinante le restamos a la segunda fila la primera y a la tercera también la primera nos queda un determinante más sencillo. Luego desarrollamos por lo elementos de la tercera fila:

$$\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2x+1 & x & 2x+1 \\ 2x-1 & 3x & 3x-2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2 & -2x & x+3 \\ 0 & 0 & 2x \end{vmatrix}=2x\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x \\ 2 & -2x \end{vmatrix}=2x\left(-4x^2+2x-6x\right)=$$

$$=2x\left(-4x^2-4x\right)=-8x^2(x+1)$$

Por tanto, la ecuación inicial es equivalente a $-8x^2(x+1)=0$, cuyas soluciones son claramente $x=0$ y $x=-1$.

Hay muchas formas de hacer el determinante. Se pueden hacer ceros de formas muy diversas.