Examen de Matemáticas II – 2º de Bachillerato

1. Resuelve las siguientes integrales. Son inmediatas, pero puedes calcularlas por cualquier otro método.

   a) $\int \sqrt{x^4 - 5x^2}\,dx$ **[1 punto]**

   b) $\int \frac{x^2}{4 + x^6}\,dx$ **[1 punto]**

2. **[2 puntos]** Resuelve las siguientes integrales usando o bien el método de integración por cambio de variable, o bien el método de integración por partes.

   a) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ **[1,5 puntos]**

   b) $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$ **[1,5 puntos]**

3. Resuelve las siguientes integrales racionales.

   a) $\int \frac{2x^3 - 9x^2 + 9x + 6}{x^2 - 5x + 6}\,dx$ **[1,5 puntos]**

   b) $\int \frac{x - 5}{x^3 + x^2 - x - 1}\,dx$ **[1,5 puntos]**

4. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = \frac{1}{3}x^2 + 1$

   a) Realiza un dibujo aproximado de la región comprendida entre las gráficas de las funciones f y g. **[0,5 puntos]**

   b) Calcula el área de la región anterior. **[1,5 puntos]**

Soluciones

1. Integrales inmediatas

a) $$\int \sqrt{x^4-5x^2}\,dx=\int \sqrt{x^2\left(x^2-5\right)}\,dx=\int x\sqrt{x^2-5}\,dx=\frac{1}{2}\int 2x\left(x^2-5\right)^{1/2}dx=\frac{1}{2}\frac{\left(x^2-5\right)^{1/2+1}}{1/2+1}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\left(x^2-5\right)^{3/2}}{3/2}+C=\frac{\sqrt{\left(x^2-5\right)^3}}{3}+C=\frac{\left(x^2-5\right)\sqrt{x^2-5}}{3}+C$$

b) $$\int \frac{x^2}{4+x^6}dx=\int \frac{x^2}{4+\left(x^3\right)^2}dx=\int \frac{x^2/4}{1+\left(x^3\right)^2/4}dx=\int \frac{x^2/4}{1+\left(x^3/2\right)^2}dx=\frac{1}{4}\int \frac{x^2}{1+\left(x^3/2\right)^2}dx=$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\int \frac{3x^2/2}{1+\left(x^3/2\right)^2}dx=\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{2}+C$$

2. Integrales por cambio de variable y por partes

a) $$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=t\Rightarrow x=t^2\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt\Rightarrow dx=2\sqrt{x}dt\Rightarrow dx=2tdt\end{array}\right]=\int \frac{\ln t^2}{t}2t\,dt=\int \frac{2\ln t}{t}2t\,dt=4\int \ln t\,dt=$$

$$=4\left(t\ln t-t\right)+C=4\left(\sqrt{x}\ln\sqrt{x}-\sqrt{x}\right)+C=4\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\ln x-\sqrt{x}\right)+C=2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C$$

b) $$\int \frac{x}{\cos^2 x}dx=\left[\begin{array}{l}u=x\ ;\ du=dx\\ dv=\dfrac{1}{\cos^2 x}\ ;\ v=\operatorname{tg}x\end{array}\right]=x\operatorname{tg}x-\int \operatorname{tg}x\,dx=x\operatorname{tg}x-\int \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}dx=$$

$$x\operatorname{tg}x-\left(-\ln\left(\cos x\right)\right)+C=x\operatorname{tg}x+\ln\left(\cos x\right)+C$$

3. Integrales racionales

a) Realizando la división: $2x^3-9x^2+9x+6=\left(2x+1\right)\left(x^2-5x+6\right)+2x$. Entonces el integrando se puede escribir así: $\dfrac{2x^3-9x^2+9x+6}{x^2-5x+6}=2x+1+\dfrac{2x}{x^2-5x+6}$.

Además, como las raíces del denominador de la expresión $\dfrac{2x}{x^2-5x+6}$ son $x=2$ y $x=3$, tenemos:

$$\frac{2x}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A\left(x-3\right)+B\left(x-2\right)}{\left(x-2\right)\left(x-3\right)}=\frac{\left(A+B\right)x+\left(-3A-2B\right)}{x^2-5x+6}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=2\\ -3A-2B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-4\\ B=6\end{cases}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^3}{x^2+x-2}dx=\int \left(2x+1\right)dx-4\int \frac{1}{x-2}dx+6\int \frac{1}{x-3}dx=x^2+x-4\ln\left(x-2\right)+6\ln\left(x-3\right)+C$$

b) La factorización del polinomio x^3+x^2-x-1 es $(x-1)(x+1)^2$. Descompongamos pues la fracción $\frac{x-5}{x^3+x^2-x-1}=\frac{x-5}{(x-1)(x+1)^2}$ en fracciones simples.

$$\frac{x-5}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

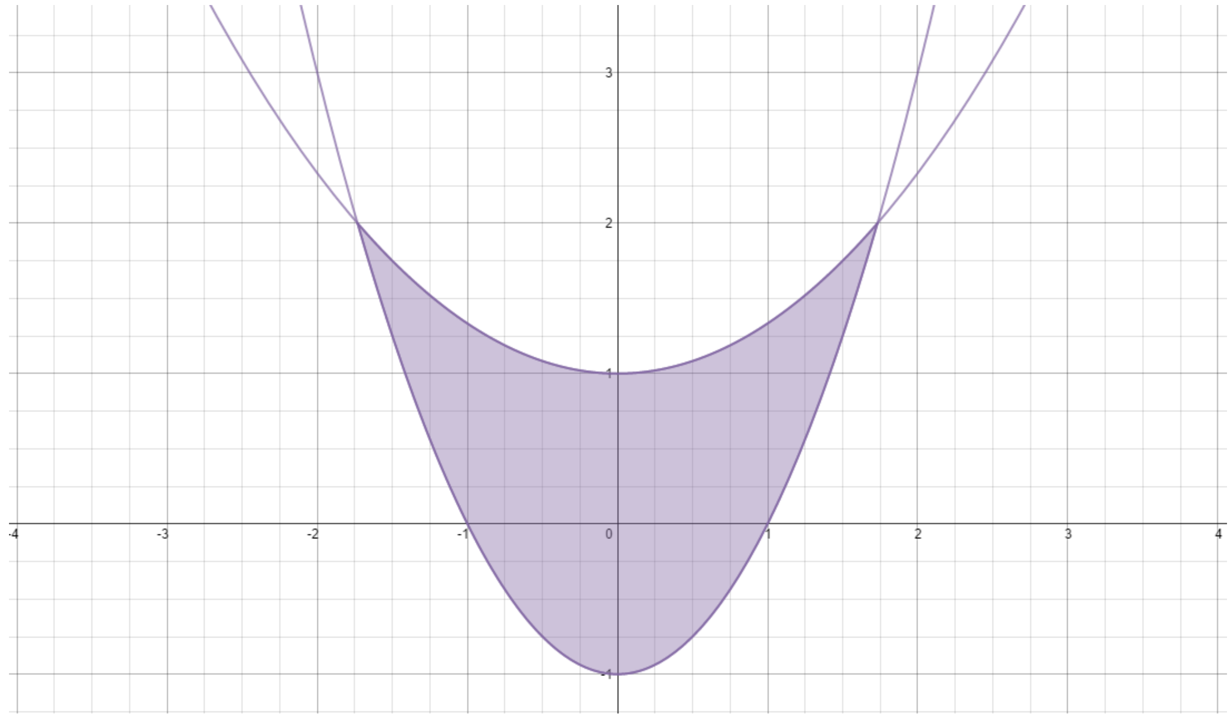
Igualando los numeradores: $x-5=A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x-1)$.

- Si $x=-1$, tenemos que $-6=-2C\Rightarrow C=3$.
- Si $x=1$, tenemos que $-4=4A\Rightarrow A=-1$.
- Y si $x=0$, tenemos que $-5=-1-B-3\Rightarrow B=1$.

Por tanto: $\frac{x-5}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}$, es decir:

$$\int\frac{x-5}{x^3+x^2-x-1}dx=-\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{1}{x+1}dx+3\int\frac{1}{(x+1)^2}dx=-\ln(x-1)+\ln(x+1)-\frac{3}{x+1}+C$$

4. La representación de la región comprendida entre las gráficas de las funciones f y g es:



Calculemos la coordenada x o abscisa de los puntos de corte de ambas funciones:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2-1=\frac{1}{3}x^2+1\Rightarrow 3x^2-3=x^2+3\Rightarrow 2x^2=6\Rightarrow x^2=3\Rightarrow\begin{cases}x_1=-\sqrt{3}\\ x_2=\sqrt{3}\end{cases}$$

De las dos funciones, la que está por encima es g, con lo que el área de la región será:

$$A=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(g(x)-f(x))dx=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left[\left(\frac{1}{3}x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)\right]dx=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(-\frac{2}{3}x^2+2\right)dx=\left[-\frac{2}{9}x^3+2x\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}=$$

$$=\left(-\frac{2}{9}\sqrt{3}^3+2\sqrt{3}\right)-\left(\frac{2}{9}\sqrt{3}^3-2\sqrt{3}\right)=-\frac{4}{9}\sqrt{3^3}+4\sqrt{3}=-\frac{4}{3}\sqrt{3}+4\sqrt{3}=\frac{8}{3}\sqrt{3}\,\text{uds}^2\cong 4,62\,\text{uds}^2$$