

Examen de Matemáticas II – 2º de Bachillerato

1. Resuelve las siguientes integrales. Son inmediatas, pero puedes calcularlas por cualquier otro método.

a) $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx$ [1 punto]

b) $\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}} dx$ [1 punto]

2. Resuelve las siguientes integrales usando o bien el método de integración por cambio de variable, o bien el método de integración por partes.

a) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ [1 punto]

b) $\int e^{3x} \sin 3x dx$ [2 puntos]

3. Resuelve las siguientes integrales racionales.

a) $\int \frac{x^3}{x^2+x-2} dx$ [1,5 puntos]

b) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^3} dx$ [1,5 puntos]

4. Dada la función $f(x) = 2 \ln x$, se pide:

a) Realizar un dibujo aproximado de la región encerrada por el eje X , la gráfica de la función f y las rectas verticales $x = \frac{1}{2}$ y $x = 4$. [0,5 puntos]

b) Calcular el área de la región anterior. [1,5 puntos]

Soluciones

1. Integrales inmediatas

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x^2}{x^{1/2}} dx - 2 \int \frac{x}{x^{1/2}} dx + \int \frac{1}{x^{1/2}} dx = \int x^{3/2} dx - 2 \int x^{1/2} dx + \int x^{-1/2} dx = \\ &= \frac{x^{3/2+1}}{3/2+1} - 2 \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C = \frac{x^{5/2}}{5/2} - 2 \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2}{5} \sqrt{x^5} - \frac{4}{3} \sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int x(1-x^2)^{-1/2} dx + 4 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int -2x(1-x^2)^{-1/2} dx + 4 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{-1/2+1}}{-1/2+1} + 4 \arcsen x + C = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2} + 4 \arcsen x + C = -\frac{2}{2} (1-x^2)^{1/2} + 4 \arcsen x + C = -\sqrt{1-x^2} + 4 \arcsen x + C \end{aligned}$$

2. Integrales por cambio de variable y por partes.

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} &= \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt \Rightarrow dx = 2\sqrt{x} dt \Rightarrow dx = 2t dt \end{array} \right] = \int \frac{2t dt}{t^2+t} = \int \frac{2}{t+1} dt = 2 \int \frac{1}{t+1} dt = \\ &= 2 \ln(t+1) + C = 2 \ln(\sqrt{x}+1) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int e^{3x} \sen 3x dx &= \left[\begin{array}{l} u = e^{3x} ; du = 3e^{3x} dx \\ dv = \sen 3x ; v = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right] = -\frac{1}{3} e^{3x} \cos 3x + \int e^{3x} \cos 3x dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = e^{3x} ; du = 3e^{3x} dx \\ dv = \cos 3x dx ; v = \frac{1}{3} \sen 3x \end{array} \right] = -\frac{1}{3} e^{3x} \cos 3x + \frac{1}{3} e^{3x} \sen 3x - \int e^{3x} \sen 3x dx \end{aligned}$$

Hemos demostrado pues que: $\int e^{3x} \sen 3x dx = -\frac{1}{3} e^{3x} \cos 3x + \frac{1}{3} e^{3x} \sen 3x - \int e^{3x} \sen 3x dx$. Pasando el

último término al primer miembro: $\int e^{3x} \sen 3x dx + \int e^{3x} \sen 3x dx = -\frac{1}{3} e^{3x} \cos 3x + \frac{1}{3} e^{3x} \sen 3x$. Es

decir, $2 \int e^{3x} \sen 3x dx = -\frac{1}{3} e^{3x} \cos 3x + \frac{1}{3} e^{3x} \sen 3x$, con lo que finalmente:

$$\int e^{3x} \sen 3x dx = -\frac{1}{6} e^{3x} \cos 3x + \frac{1}{6} e^{3x} \sen 3x + C = \frac{e^{3x} (\sen 3x - \cos 3x)}{6} + C$$

3. Integrales racionales

a) Dividiendo el numerador entre el denominador tenemos $x^3 = (x-1)(x^2+x-2) + 3x-2$, con lo que

$$\text{el integrando lo podemos escribir así: } \frac{x^3}{x^2+x-2} = x-1 + \frac{3x-2}{x^2+x-2}.$$

Además, como las raíces del denominador de la expresión $\frac{3x-2}{x^2+x-2}$ son $x=1$ y $x=-2$, tenemos:

$$\frac{3x-2}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{(A+B)x+(2A-B)}{x^2+x-2} \Rightarrow \begin{cases} A+B=3 \\ 2A-B=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=\frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^3}{x^2+x-2} dx = \int (x-1) dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{8}{3} \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{3} \ln(x-1) + \frac{8}{3} \ln(x+2) + C$$

b) Descompongamos la fracción $\frac{x^2+1}{(x+1)^3}$ en fracciones simples.

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} = \frac{A(x+1)^2 + B(x+1) + C}{(x+1)^3} = \frac{Ax^2 + (2A+B)x + (A+B+C)}{(x+1)^3}$$

Entonces $\begin{cases} A=1 \\ 2A+B=0 \\ A+B+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-2 \\ C=2 \end{cases}$. Por tanto $\frac{x^2+1}{(x+1)^3} = \frac{1}{x+1} + \frac{-2}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^3}$, es decir:

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^3} dx = \int \frac{1}{x+1} dx - 2 \int \frac{1}{(x+1)^2} dx + 2 \int \frac{1}{(x+1)^3} dx = \ln(x+1) + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + C$$

4. La función $f(x) = 2 \ln x$ corta al eje X en el punto de abscisa $x=1$. Por tanto, la región es de la forma:



$$\int_{1/2}^4 2 \ln x dx = \int_{1/2}^1 2 \ln x dx + \int_1^4 2 \ln x dx, \text{ con lo que el área pedida será } A = \left| \int_{1/2}^1 2 \ln x dx \right| + \left| \int_1^4 2 \ln x dx \right|.$$

Como $\int 2 \ln x dx = 2 \int \ln x dx = 2(x \ln x - x) + C$, tenemos:

$$\int_{1/2}^1 2 \ln x dx = 2(x \ln x - x) \Big|_{1/2}^1 = 2(1 \ln 1 - 1) - 2\left(\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = -2 + \ln 2 + 1 = \ln 2 - 1 \cong -0,307$$

$$\int_1^4 2 \ln x dx = 2(x \ln x - x) \Big|_1^4 = 2(4 \ln 4 - 4) - 2(1 \ln 1 - 1) = 8 \ln 4 - 8 + 2 = 8 \ln 4 - 6 \cong 5,09$$

Por tanto $A = \left| \int_{1/2}^1 2 \ln x dx \right| + \left| \int_1^4 2 \ln x dx \right| \cong 0,307 + 5,09 = 5,397 \text{ uds}^2$.