Examen de Matemáticas II – 2º de Bachillerato

1. **[1 punto]** Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$$

2. **[2 puntos]** Sea la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+5$. Halla a y b para que f tenga en $x=1$ un punto de inflexión con tangente horizontal.

3. Dada la función $f(x)=xe^x$, calcula:
   a) **[1 punto]** Intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos (ambas coordenadas).
   b) **[1 punto]** Intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión (ambas coordenadas).
   c) **[1 punto]** Representación gráfica aproximada.

4. Consideremos la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x} & \text{si } -2\le x\le -1\\[2mm] \dfrac{x^2-b}{2} & \text{si } -1\le x\le 0\end{cases}$
   a) **[1,5 puntos]** Hallar a y b para que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-2,\ 0]$.
   b) **[1 punto]** Para los valores de a y b hallados en el apartado anterior, encuentra el valor de $c\in[-2,\ 0]$ para que la recta tangente en el punto de abscisa $x=c$ sea paralela a la cuerda que une los puntos $A=(-2,\ f(-2))$ y $B=(0,\ f(0))$.

5. **[1,5 puntos]** Hallar un número positivo de tal forma que la suma de tal número con su inverso sea mínima.

Soluciones

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x-x}{x\operatorname{sen} x}=\left[\dfrac{0}{0}\to \text{L'Hôpital}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\operatorname{sen} x+x\cos x}=\left[\dfrac{0}{0}\to \text{L'Hôpital}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\operatorname{sen} x}{\cos x+\cos x-x\operatorname{sen} x}=\dfrac{0}{1+1-0}=\dfrac{0}{2}=0$

2. $f(x)=x^3+ax^2+bx+5$

En los puntos de inflexión la segunda derivada es igual a cero. Por tanto, en este caso, $f''(1)=0$. $f'(x)=3x^2+2ax+b$, $f''(x)=6x+2a$. Entonces $f''(1)=0\Leftrightarrow 6+2a=0\Leftrightarrow a=-3$.
Como en el punto de inflexión $x=1$ la tangente es horizontal, esto es lo mismo que decir que en el punto $x=1$ la función presenta un extremo relativo, con lo que $f'(1)=0$. Como $f'(1)=3+2a+b$, tenemos $3+2\cdot(-3)+b=0\Leftrightarrow 3-6+b=0\Leftrightarrow -3+b=0\Leftrightarrow b=3$.

3. $f(x)=xe^x$. El dominio de esta función es todo $\mathbb{R}$.

$f'(x)=1\cdot e^x+xe^x=e^x+xe^x=e^x(1+x)$. Entonces $f'(x)=0\Leftrightarrow(1+x)e^x=0\Leftrightarrow 1+x=0\Leftrightarrow x=-1$

$f''(x)=e^x(1+x)+e^x\cdot 1=e^x(1+x+1)==e^x(2+x)$. Entonces $f''(x)=0\Leftrightarrow e^x(2+x)=0\Leftrightarrow x=-2$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,+\infty)$
signo de f'	$-$	$+$
monotonía	$\downarrow\downarrow$	$\uparrow\uparrow$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,+\infty)$
signo de f''	$-$	$+$
curvatura	$\cap$	$\cup$

Por tanto, f es estrictamente decreciente en el intervalo $(-\infty,-1)$, estrictamente creciente en $(-1,+\infty)$, y tiene un máximo relativo en el punto de abscisa $x=-1$, concretamente en $(-1,-e^{-1})\cong(-1,-0{,}37)$.

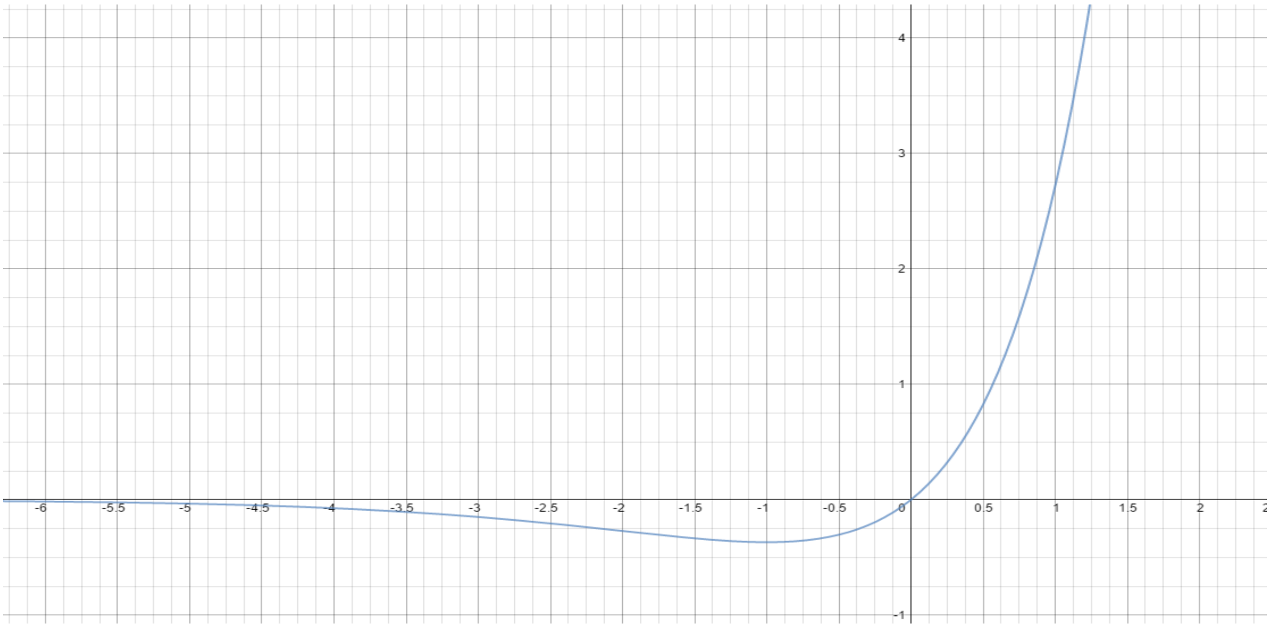
Por otro lado, f es convexa en el intervalo $(-\infty,-2)$ y cóncava en el intervalo $(-2,+\infty)$. En el punto $x=-2$ hay un punto de inflexión, concretamente en el punto $(-2,-2e^{-2})\cong(-2,-0{,}27)$.

Además:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=\lim\limits_{x\to+\infty}(-xe^{-x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{e^x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\to \text{L´Hôpital}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{e^x}=0$. Lo que quiere decir que la recta $y=0$ (el eje X) es una asíntota horizontal.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^x=+\infty$

Es fácil también darse cuenta de que el punto de corte con los ejes es el $(0,0)$.

Entonces la representación gráfica queda como sigue:



4. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x} & \text{si } -2\le x\le -1\\ \dfrac{x^2-b}{2} & \text{si } -1\le x\le 0\end{cases}$

a) f es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ salvo, quizás, en $x=-1$. Hallaremos a y b para que lo sea.

Para que sea continua ha de ser $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)\Rightarrow -a=\dfrac{1-b}{2}$.

$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-a}{x^2} & \text{si } -2\le x\le -1\\ x & \text{si } -1\le x\le 0\end{cases}$. f derivable en $x=-1$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f'(x)\Rightarrow -a=-1\Rightarrow a=1$.

Sustituyendo en $-a=\dfrac{1-b}{2}$ se tiene: $-1=\dfrac{1-b}{2}\Rightarrow -2=1-b\Rightarrow b=1+2\Rightarrow b=3$.

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si } -2\le x\le -1\\ \dfrac{x^2-3}{2} & \text{si } -1\le x\le 0\end{cases}$; $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{x^2} & \text{si } -2\le x\le -1\\ x & \text{si } -1\le x\le 0\end{cases}$. Por el teorema del valor medio $\exists c\in[-2,\,0]:\ f(0)-f(-2)=f'(c)(0-(-2))\Rightarrow \dfrac{-3}{2}-\left(\dfrac{-1}{2}\right)=2f'(c)\Rightarrow f'(c)=-\dfrac{1}{2}$. Entonces, se tiene que o bien $-\dfrac{1}{c^2}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow c^2=2\Rightarrow c=-\sqrt{2}$ ($c=\sqrt{2}$ se descarta porque no se encuentra entre -2 y 0), o bien $c=-\dfrac{1}{2}$.

5. Sea x el número. Entonces ha de ser mínima la suma $S=x+\dfrac{1}{x}$. Derivando tenemos $S'=1-\dfrac{1}{x^2}$. Igualando a cero: $1-\dfrac{1}{x^2}=0\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow \begin{cases}x=-1\\ x=1\end{cases}$. Como el número que buscamos es positivo la única posibilidad que queda es que $x=1$. La segunda derivada es $S''=\dfrac{2}{x^3}$ que en $x=1$ vale $S''(1)=2>0$, con lo que $x=1$ es un mínimo de la función S. Por tanto el número buscado es el 1.