Examen de Matemáticas II – 2º de Bachillerato

1. **[1,5 puntos]** Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\mathrm{tg}^2 x}{1-\cos x}$$

2. **[2 puntos]** Sea la función $f(x)=2x^3+12x^2+ax+b$. Determina a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta $y=2x+3$.

3. Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$, calcula:
   a) **[1 punto]** Intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos (ambas coordenadas).
   b) **[1 punto]** Intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión (ambas coordenadas).
   c) **[1 punto]** Representación gráfica aproximada.

4. Sea la función $f(x)=\dfrac{2-x^2}{x^4}$
   a) **[0,5 puntos]** Comprueba que $f(-1)=f(1)$
   b) **[1 punto]** Comprueba que no existe ningún número $c\in[-1,\,1]$ tal que $f'(c)=0$.
   c) **[0,5 puntos]** ¿Por qué no se cumple el teorema de Rolle

5. El alcalde de un pueblo quiere preparar un recinto rectangular para celebrar fiestas. Aprovecha para uno de los lados una tapia existente y dispone de 300 m de tela metálica para cercar los otros tres lados.
   a) **[1 punto]** Halla las dimensiones del recinto máximo que se puede acotar.
   b) **[0,5 puntos]** Calcula el área de dicho recinto.

Soluciones

1. Como aparece la indeterminación $\frac{0}{0}$ usaremos la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\mathrm{tg}^2 x}{1-\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-2\mathrm{tg}\,x\left(1+\mathrm{tg}^2 x\right)}{\mathrm{sen}\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\mathrm{tg}\,x-2\mathrm{tg}^3 x}{\mathrm{sen}\,x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\left(1+\mathrm{tg}^2 x\right)-6\mathrm{tg}^2 x\left(1+\mathrm{tg}^2 x\right)}{\cos x}=\frac{-2}{1}=-2$$

2. $f(x)=2x^3+12x^2+ax+b$

En los puntos de inflexión la segunda derivada es igual a cero.

$f'(x)=6x^2+24x+a$; $f''(x)=12x+24$. Entonces $f''(x)=0\Leftrightarrow 12x+24=0\Leftrightarrow x=-2$

Además $f'''(x)=12\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, con lo que $x=-2$ es un punto de inflexión.

La recta tangente en el punto de inflexión es $y=2x+3$, con lo que su pendiente es $m=2$. Pero la derivada en el punto de inflexión es igual a la pendiente de la recta tangente, con lo que $f'(-2)=2$, es decir: $6(-2)^2+24(-2)+a=2\Rightarrow 24-48+a=2\Rightarrow a=26$

Pero la recta tangente también es $y-f(-2)=f'(-2)(x+2)$. Entonces:

$y-(-20+b)=2(x+2)\Rightarrow y+20-b=2x+4\Rightarrow y=2x+b-16$.

De aquí se deduce que $b-16=3$, con lo que $b=19$.

3. $f(x)=\frac{x}{e^x}$. El dominio de esta función es todo $\mathbb{R}$, ya que $e^x>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

$f'(x)=\frac{1e^x-xe^x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{(1-x)e^x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{1-x}{e^x}$. Entonces $f'(x)=0\Leftrightarrow 1-x=0\Leftrightarrow x=1$

$f''(x)=\frac{-1e^x-(1-x)e^x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{-e^x-e^x+xe^x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{(x-2)e^x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{x-2}{e^x}$. De aquí $f''(x)=0\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2$

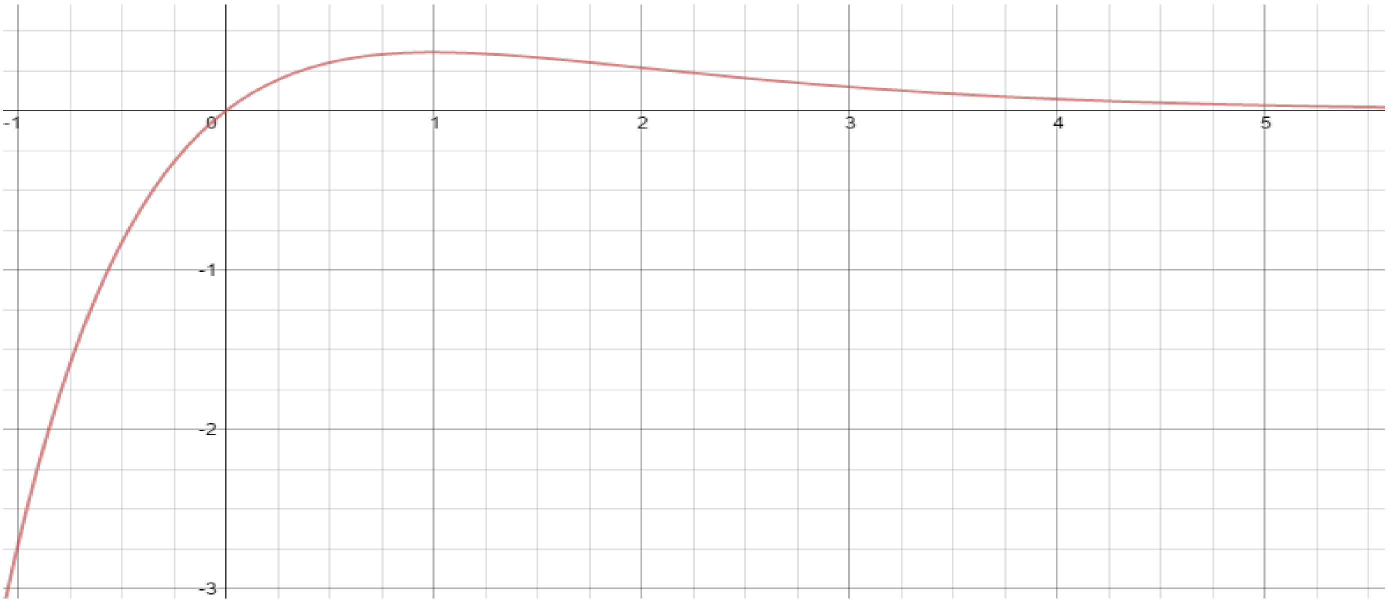
	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
signo de f'	$+$	$-$
monotonía	$\uparrow\uparrow$	$\downarrow\downarrow$

	$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
signo de f''	$-$	$+$
curvatura	$\cap$	$\cup$

Por tanto f es estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty,1)$, estrictamente decreciente en el intervalo $(1,+\infty)$, y tiene un máximo relativo en el punto de abscisa $x=1$, concretamente en $\left(1,\frac{1}{e}\right)\cong(1,\ 0{,}368)$.

Por otro lado, f es convexa en el intervalo $(-\infty,\ 2)$ y cóncava en el intervalo $(2,+\infty)$. En el punto $x=0$ hay un punto de inflexión, concretamente en el punto $\left(2,\frac{2}{e^2}\right)\cong(2,\ 0{,}271)$.

Con los datos anteriores y teniendo en cuenta que $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=-\infty$, y que $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$, la representación gráfica queda como sigue:



4. $f(x)=\dfrac{2-x^2}{x^4}$

a) $f(1)=\dfrac{2-1^2}{1^4}=\dfrac{2-1}{1}=\dfrac{2}{1}=2$; $f(-1)=\dfrac{2-(-1)^2}{(-1)^4}=\dfrac{2-1}{1}=\dfrac{2}{1}=2$. Por tanto $f(1)=f(-1)$.

b) $f'(x)=\dfrac{-2x\cdot x^4-(2-x^2)4x^3}{x^8}=\dfrac{-2x^5-8x^3+4x^5}{x^8}=\dfrac{2x^5-8x^3}{x^8}=\dfrac{2x^2-8}{x^5}$

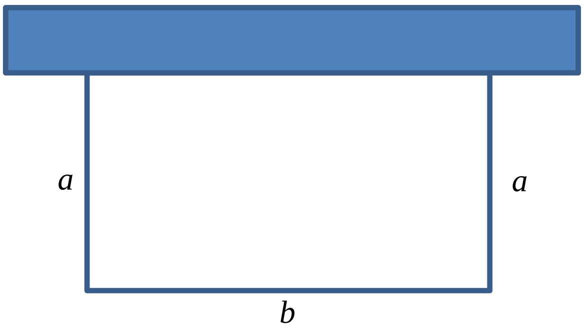
Entonces $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x^2-8=0\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\x=2\end{cases}$

O sea, que no existe ningún $c\in[-1,1]$ tal que $f'(c)=0$.

c) No se cumple el teorema de Rolle porque no se cumple una de sus hipótesis. Y es que en el intervalo $[-1,1]$ no es continua, ya que en $x=0$ hay un punto de discontinuidad. De hecho, f no está definida en $x=0$.

5. Llamemos A a la función área y a y b a los lados vertical y horizontal, respectivamente.

$$\begin{cases}2a+b=300\Rightarrow b=300-2a\\A=ba\Rightarrow A=(300-2a)a=300a-2a^2\end{cases}$$



Igualando a cero la derivada de A:

$A'=0\Leftrightarrow 300-4a=0\Rightarrow 4a=300\Rightarrow a=75$.

Como $A''=-4\Rightarrow P''(300)<0$, efectivamente 300 es un máximo.

Así, para que el recinto tenga área máxima: $a=75\,\text{m}$ y $b=300-2\cdot75\Rightarrow b=150\,\text{m}$.

El área de dicho recinto es $A=ab=300\cdot150=45000\,\text{m}^2$.