Examen de Matemáticas II – 2º de Bachillerato

1. **[1 punto]** Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos\left(2x\right)\right)}{x^2}$$

2. Sea la función $f\left(x\right)=x^4+ax^3+bx^2+cx+7$

   a) **[1 punto]** Calcula c sabiendo que su recta tangente en el punto de abscisa $x=0$ es horizontal.

   b) **[1 punto]** Para el valor de c encontrado en el apartado anterior, calcula a y b sabiendo que esta función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x=-2$ y que corta al eje X en $x=1$.

3. Dada la función $f\left(x\right)=\left(x+1\right)e^{-x}$, calcula:

   a) **[1 punto]** Intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos (ambas coordenadas).

   b) **[1 punto]** Intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión (ambas coordenadas).

   c) **[1 punto]** Representación gráfica aproximada.

4. Consideremos la función $f\left(x\right)=\begin{cases} ax & \text{si} \quad x<-1 \\ \dfrac{x^2-b}{2} & \text{si} \quad x\geq -1 \end{cases}$

   a) **[1,5 puntos]** Hallar a y b para que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $\left[-2,\,2\right]$.

   b) **[1 punto]** Para los valores de a y b hallados en el apartado anterior, encuentra el valor de $c\in\left[-2,\,2\right]$ para que la recta tangente en el punto de abscisa $x=c$ sea paralela a la cuerda que une los puntos $A=\left(-2,\,f\left(-2\right)\right)$ y $B=\left(2,\,f\left(2\right)\right)$.

5. El coste de una ventana rectangular es 12,5 € por metro lineal de los lados verticales y 8 € por metro lineal de los lados horizontales.

   a) **[1 punto]** Calcular razonadamente las dimensiones que debe tener el marco de una ventana de 1 m^2 de superficie para que resulte lo más económico posible.

   b) **[0,5 puntos]** Calcular, además, el coste de ese marco más económico posible considerado en el apartado anterior.

Soluciones

1. La indeterminación $\frac{0}{0}$ aparecerá dos veces. Usaremos la regla de L'Hôpital también dos veces.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(2x))}{x^2}=\left[\text{Indet } \frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos(2x)}\cdot(-\operatorname{sen}(2x)\cdot 2)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\operatorname{sen}(2x)}{2x\cos(2x)}=\left[\text{Indet } \frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos(2x)\cdot 2}{2\cos(2x)+2x(-\operatorname{sen}(2x)\cdot 2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-4\cos(2x)}{2\cos(2x)-4x\operatorname{sen}(2x)}=\frac{-4\cdot 1}{2\cdot 1-4\cdot 0\cdot 0}=\frac{-4}{2}=-2$$

2. $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+7$

a) Que la recta tangente en el punto de abscisa $x=0$ sea horizontal quiere decir que $f'(0)=0$, y como $f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$, se tiene que $4\cdot 0^3+3a\cdot 0^2+2b\cdot 0+c=0\Rightarrow c=0$.

b) Por el apartado anterior la función y la derivada de la función quedan de la forma:
$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+7$, $f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx$

Por un lado, como en $x=-2$ hay un extremo relativo se tiene que $f'(-2)=0$, es decir:

$$4(-2)^3+3a(-2)^2+2b(-2)=0\Rightarrow -32+12a-4b=0 \quad (1)$$

Por otro lado, como la función corta al eje X en $x=1$, tenemos que $f(1)=0$, o sea:

$$1+a+b+7=0\Rightarrow a+b=-8 \quad (2)$$

Por (2) tenemos que $b=-8-a$. Sustituyendo en (1): $-32+12a-4(-8-a)=0\Rightarrow$
$\Rightarrow -32+12a+32+4a=0\Rightarrow 16a=0\Rightarrow a=0$. Y de aquí es claro que $b=-8$.

3. $f(x)=(x+1)e^{-x}$. El dominio de esta función es todo $\mathbb{R}$.

$f'(x)=1\cdot e^{-x}+(x+1)e^{-x}(-1)=e^{-x}-xe^{-x}-e^{-x}=-xe^{-x}$. Entonces $f'(x)=0\Leftrightarrow -xe^{-x}=0\Leftrightarrow x=0$

$f''(x)=-1e^{-x}+(-x)e^{-x}(-1)=-e^{-x}+xe^{-x}=(x-1)e^{-x}$. De aquí $f''(x)=0\Leftrightarrow (x-1)e^{-x}=0\Leftrightarrow x=1$

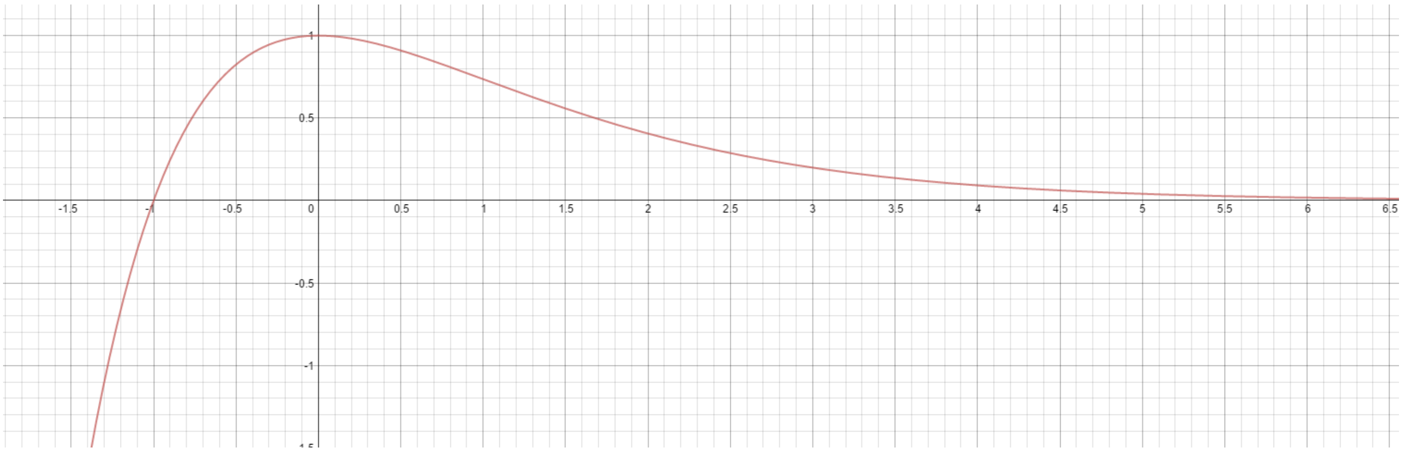
	$(-\infty,\,0)$	$(0,\,+\infty)$
signo de f'	+	–
monotonía	↑↑	↓↓

	$(-\infty,\,1)$	$(1,\,+\infty)$
signo de f''	–	+
curvatura	$\cap$	$\cup$

Por tanto f es estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty,\,0)$, estrictamente decreciente en $(0,\,+\infty)$, y tiene un máximo relativo en el punto de abscisa $x=0$, concretamente en $(0,1)$.

Por otro lado, f es convexa en el intervalo $(-\infty,\,1)$ y cóncava en el intervalo $(1,\,+\infty)$. En el punto $x=1$ hay un punto de inflexión, concretamente en el punto $(1,2e^{-1})\cong(1,\,0{,}736)$.

Con los datos anteriores y teniendo en cuenta que $\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^{-x}=-\infty$, y que $\lim_{x\to+\infty}(x+1)e^{-x}=$
$=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{+\infty}=0$, la representación gráfica queda como sigue:



4. $f(x)=\begin{cases} ax & \text{si} \quad x<-1 \\ \dfrac{x^2-b}{2} & \text{si} \quad x\geq -1 \end{cases}$

a) f es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ salvo, quizás, en $x=-1$. Hallaremos a y b para que lo sea.

Para que sea continua ha de ser $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)\Rightarrow -a=\dfrac{1-b}{2}$.

$f'(x)=\begin{cases} a & \text{si} \quad x<-1 \\ x & \text{si} \quad x>-1 \end{cases}$. Para que f sea derivable en $x=-1$ $\lim\limits_{x\to -1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f'(x)\Rightarrow a=-1$

Sustituyendo en $-a=\dfrac{1-b}{2}$ se tiene $1=\dfrac{1-b}{2}\Rightarrow 2=1-b\Rightarrow b=-1$.

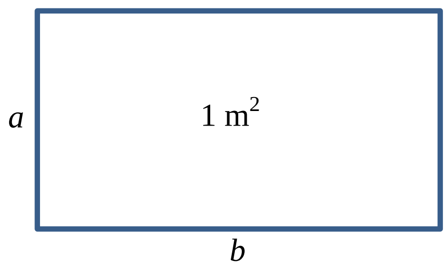
Por tanto las hipótesis del teorema del valor medio: f continua en $[-2,\,2]$ y derivable en $(-2,\,2)$, se cumplen para $a=-1$, $b=-1$.

b) $f(x)=\begin{cases} -x & \text{si} \quad x<-1 \\ \dfrac{x^2+1}{2} & \text{si} \quad x\geq -1 \end{cases}$; $f'(x)=\begin{cases} -1 & \text{si} \quad x<-1 \\ x & \text{si} \quad x\geq -1 \end{cases}$. Por el teorema del valor medio $\exists c\in[-2,\,2]$:

$f(2)-f(-2)=f'(c)(2-(-2))\Rightarrow \dfrac{5}{2}-2=4f'(c)\Rightarrow f'(c)=\dfrac{1}{8}$. Si fuese $c<-1$, tendría que ser $f'(c)=-1$, por tanto debe ser por fuerza $c>-1$ con lo que $f'(c)=c=\dfrac{1}{8}$.

5. Llamemos P a la función precio y a y b a los lados vertical y horizontal, respectivamente.

$$\begin{cases} a\cdot b=1\Rightarrow b=\dfrac{1}{a} \\ P=25a+16b\Rightarrow P=25a+\dfrac{16}{a} \end{cases}$$



Igualando a cero la derivada de P:

$P'=0\Leftrightarrow 25-\dfrac{16}{a^2}=0\Rightarrow a^2=0{,}64\Rightarrow a=0{,}8$.

Como $P''=\dfrac{32}{a^3}\Rightarrow P''(0{,}8)>0$, efectivamente $0{,}8$ es un mínimo. Así, para que el marco resulte lo más económico posible: $a=0{,}8$ m y $b=\dfrac{1}{0{,}8}=1{,}25$ m.

El coste del marco más económico es $P=25\cdot 0{,}8+16\cdot 1{,}25=40$ €.