Examen de Matemáticas II – 2º de Bachillerato

1. **[2 puntos, 1 punto por apartado]** Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$

   b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x^3+x^2}$

2. **[1 punto]** Calcula el valor de m para que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{mx^2-1+\cos x}{\operatorname{sen}\left(x^2\right)}=0$

3. **[1 punto]** Aplica adecuadamente el teorema de Bolzano para encontrar un intervalo de longitud 1 en el que la ecuación $2x^3+5x^2=6x+9$ tenga una solución.

4. **[3 puntos, 1 punto por apartado]** Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica en la medida de lo posible el resultado:

   a) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}}$

   b) $y=\ln\left(\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right)$

   c) $y=x^{\sqrt{x}}$

5. **[3 puntos, 1 punto por apartado]** Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & \text{si} \quad x<2 \\ e^{2-x}+2 & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$

   a) Utilizando la definición de continuidad, hallar el valor de *a* para que *f* sea continua en $x=2$.

   b) Para el valor de *a* hallado en el apartado anterior, ¿es *f* derivable en $x=2$?

   c) Hallar la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$.

Soluciones

1. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=[\text{Indeterminación}\,1^{\infty}]$. Entonces $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{L}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\cos x}{x+1}-1\right)=L$.

Calculemos pues este último límite:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\cos x}{x+1}-1\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\cos x-x-1}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-x-1}{x^2+x}=\left[\text{Indeterminacion}\ \dfrac{0}{0}\right]$. Para resolver la indeterminación aplicaremos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x-1}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}x-1}{2x+1}=\frac{0-1}{2\cdot 0+1}=\frac{-1}{1}=-1$$

Por tanto: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x^3+x^2}=\left[\text{Indeterminación}\ \dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot\operatorname{sen}(2x)\cdot\cos(2x)\cdot 2}{3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\operatorname{sen}(2x)\cos(2x)}{3x^2+2x}=\left[\text{Ind}\ \dfrac{0}{0}\right]$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot\cos(2x)\cdot 2\cdot\cos(2x)+4\cdot\operatorname{sen}(2x)\cdot(-\operatorname{sen}(2x))\cdot 2}{6x+2}=\lim_{x\to 0}\frac{8\cos^2(2x)-8\cdot\operatorname{sen}^2(2x)}{6x+2}=\frac{8-0}{0+2}=4$$

Para hacer el límite anterior se ha aplicado dos veces la regla de L'Hôpital.

2. Calcula el valor de m para que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{mx^2-1+\cos x}{\operatorname{sen}\left(x^2\right)}=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{mx^2-1+\cos x}{\operatorname{sen}\left(x^2\right)}=\left[\text{Indeterminación}\ \frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2mx-\operatorname{sen}x}{2x\cos\left(x^2\right)}=\left[\text{Indeterminación}\ \frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2m-\cos x}{2\cos\left(x^2\right)+2x\cdot\left(-\operatorname{sen}\left(x^2\right)\right)\cdot 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2m-\cos x}{2\cos\left(x^2\right)-4x^2\operatorname{sen}\left(x^2\right)}=\frac{2m-1}{2}$$

Por tanto, para que el límite sea igual a 0, ha de ser $\dfrac{2m-1}{2}=0\Rightarrow 2m-1=0\Rightarrow 2m=1\Rightarrow m=\dfrac{1}{2}$

3. Aplica adecuadamente el teorema de Bolzano para encontrar un intervalo de longitud 1 en el que la ecuación $2x^3+5x^2=6x+9$ tenga una solución.

La ecuación $2x^3+5x^2=6x+9$, es equivalente a la ecuación $2x^3+5x^2-6x-9=0$. Sea entonces la función $f(x)=2x^3+5x^2-6x-9$, que es claramente continua en todo $\mathbb{R}$ por ser polinómica. Además $f(1)=2+5-6-9=-8<0$ y $f(2)=2\cdot 8+5\cdot 4-6\cdot 2-9=16+20-12-9=15>0$. Por el teorema de Bolzano, existe $c\in(1,\,2)$ tal que $f(c)=0$, es decir, tal que $2c^3-5c^2-6c-9=0$, o lo que es lo mismo, existe $c\in(1,\,2)$ tal que $2c^3-5c^2=6c+9$, tal y como queríamos demostrar.

4. Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica en la medida de lo posible el resultado:

a) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}}$

$$y'=\frac{1\cdot\sqrt{x^2-2}-x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-2}}}{\left(\sqrt{x^2-2}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2-2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}}{x^2-2}=\frac{\dfrac{x^2-2-x^2}{\sqrt{x^2-2}}}{x^2-2}=\frac{-2}{\left(x^2-2\right)\sqrt{x^2-2}}=\frac{-2}{\sqrt{\left(x^2-2\right)^3}}$$

b) $y=\ln\left(\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}\right)$

$$y'=\frac{1}{\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}}\cdot\frac{\cos x\left(1-\operatorname{sen}x\right)-\left(1+\operatorname{sen}x\right)\left(-\cos x\right)}{\left(1-\operatorname{sen}x\right)^2}=\frac{1-\operatorname{sen}x}{1+\operatorname{sen}x}\cdot\frac{\cos x-\cos x\operatorname{sen}x+\cos x+\cos x\operatorname{sen}x}{\left(1-\operatorname{sen}x\right)^2}=$$

$$=\frac{2\cos x}{\left(1+\operatorname{sen}x\right)\left(1-\operatorname{sen}x\right)}=\frac{2\cos x}{1-\operatorname{sen}^2x}=\frac{2\cos x}{\cos^2 x}=\frac{2}{\cos x}$$

c) $y=x^{\sqrt{x}}$. Usaremos la derivación logarítmica. Tomando logaritmos se tiene que $\ln y=\ln x^{\sqrt{x}}$, es decir, $\ln y=\sqrt{x}\ln x$. Derivando los dos miembros de la igualdad tenemos ahora:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\sqrt{x}\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{y'}{y}=\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x}\Rightarrow y'=x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)$$

6. Dada la función $f\left(x\right)=\begin{cases}ax^2+1 & \text{si} \quad x<2\\ e^{2-x}+2 & \text{si} \quad x\geq 2\end{cases}$

a) Utilizando la definición de continuidad, hallar el valor de *a* para que *f* sea continua en $x=2$.

$\lim\limits_{x\to2^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to2^+}f\left(x\right)=f\left(2\right)\Rightarrow 4a+1=e^0+2\Rightarrow 4a+1=3\Rightarrow 4a=2\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$. Por tanto la función queda de la forma $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2+1 & \text{si} \quad x<2\\ e^{2-x}+2 & \text{si} \quad x\geq 2\end{cases}$

b) Para el valor de *a* hallado en el apartado anterior, ¿es *f* derivable en $x=2$?

$$\left.\begin{array}{l} f'\left(2^-\right)=\lim\limits_{x\to2^-}f'\left(x\right)=\lim\limits_{x\to2^-}x=2\\ f'\left(2^+\right)=\lim\limits_{x\to2^+}f'\left(x\right)=\lim\limits_{x\to2^+}\left(-e^{2-x}\right)=-1\end{array}\right\}\Rightarrow \text{como } f'\left(2^-\right)\neq f'\left(2^+\right),\ f \text{ no es derivable en } x=2.$$

c) Hallar la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$.

La recta tangente en $x=1$ es $y-f\left(1\right)=f'\left(1\right)\left(x-1\right)$. Pero $f\left(1\right)=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$ y $f'\left(1\right)=1$, porque a la izquierda de 2 es $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{2}2x=x$. Por tanto la recta tangente en el punto $x=1$ queda de la forma

$$y-\frac{3}{2}=1\left(x-1\right)\Rightarrow y=x-1+\frac{3}{2}\Rightarrow y=x+\frac{1}{2}.$$