

Examen de Matemáticas II – 2º de Bachillerato

1. Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}$
2. Encuentra el punto de la recta $x + y = 4$, que cumpla que la suma de los cuadrados de sus coordenadas sea mínima.
3. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$
 - a) Halla su dominio, puntos de corte con los ejes y simetrías.
 - b) Halla las asíntotas horizontales y verticales.
 - c) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos.
 - d) Haz una representación gráfica aproximada.
4. Halla las derivadas de las siguientes funciones:
 - a) $y = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}$
 - b) $y = \cos \sqrt{\ln x}$
5. Halla las siguientes integrales indefinidas:
 - a) $\int \frac{x + 36}{4 + 9x^2} dx$
 - b) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$
6. Resuelve la ecuación matricial $AXB = B^2$, siendo
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
7. a) Halla la ecuación general de un plano π que contenga a la recta $r \equiv \begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$ y pase por el origen de coordenadas.
b) Halla las ecuaciones de una recta s contenida en dicho plano, que sea perpendicular a r y que pase por el punto $P(1, 0, 0)$.

1. Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}$

Solución:

Cuando $x \rightarrow 0$, $\cos x \rightarrow 1 \Rightarrow 1 - \cos x \rightarrow 0$. Por otro lado, también cuando $x \rightarrow 0$, $e^x \rightarrow 1 \Rightarrow (e^x - 1)^2 \rightarrow 0$.

Esto quiere decir que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}$ da lugar a una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Podemos de esta manera aplicar la regla de L'Hôpital, según la cual, llamando $f(x) = 1 - \cos x$ y

$g(x) = (e^x - 1)^2$, se tiene: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$f'(x) = 0 - (-\sin x) = \sin x$, $g'(x) = 2(e^x - 1)e^x$. Por tanto $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ vuelve a ser una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Volviendo a aplicar la regla de L'Hôpital se tiene: $f''(x) = \cos x$,

$g''(x) = 2[e^x e^x + (e^x - 1)e^x] = 2[e^x(e^x + e^x - 1)] = 2e^x(2e^x - 1)$, con lo que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2e^x(2e^x - 1)} = \frac{1}{2(2 - 1)} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Por tanto } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{1}{2}.$$

2. Encuentra el punto de la recta $x + y = 4$, que cumpla que la suma de los cuadrados de sus coordenadas sea mínima.

Solución:

Se trata de encontrar un punto (x, y) tal que $x^2 + y^2$ sea mínima, bajo la condición $x + y = 4$. De esta última igualdad se obtiene $y = 4 - x$. Sustituyendo este valor en la expresión $x^2 + y^2$, lo que tendremos que hacer entonces es minimizar la función $f(x) = x^2 + (4 - x)^2$.

$f'(x) = 2x + 2(4 - x)(-1) = 2x - 8 + 2x = 4x - 8$. Por tanto $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (este punto es un posible extremo relativo).

$f''(x) = 4 \Rightarrow f''(2) = 4 > 0$. Entonces $x = 2$ es un mínimo relativo. El valor de y será $y = 4 - x = 4 - 2 = 2$

Así pues, el punto de la recta $x + y = 4$, que cumple que la suma de los cuadrados de sus coordenadas es mínima es $(2, 2)$.

3. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$

- a) Halla su dominio, puntos de corte con los ejes y simetrías.
b) Halla las asíntotas horizontales y verticales.

- c) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos.
d) Haz una representación gráfica aproximada.

Solución:

- a) Por tratarse de una función racional el dominio será el conjunto de los números reales excepto aquellos que anulen el denominador. $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2, x = -2$. Por tanto $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Los puntos de corte con el eje X son de la forma $(x, 0)$. Hacemos pues $y = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3 = 0$, que no tiene soluciones reales. Por tanto la función no corta al eje X .

Los puntos de corte con el eje Y son de la forma $(0, y)$. Hacemos pues $x = 0 \Rightarrow y = \frac{0^2 + 3}{0^2 - 4} = -\frac{3}{4}$. Por tanto

la función corta al eje Y en el punto $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 3}{(-x)^2 - 4} = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = f(x) \Rightarrow f \text{ es par (simétrica respecto del eje } Y).$$

- b) Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = 1 \Rightarrow y = 1$ es una asíntota horizontal.

Asíntotas verticales: hemos visto antes que $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2, x = -2$. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \infty = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 2^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 2^+ \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \infty = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow -2^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow -2^+ \end{cases}$$

Por tanto $x = 2, x = -2$ son asíntotas verticales.

c)
$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - (x^2 + 3)2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3 - 6x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-14x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-14x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \Leftrightarrow -14x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (este es un posible extremo relativo).}$$

Estudiemos ahora el signo de la primera derivada:

$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$
creciente	creciente	decreciente	decreciente

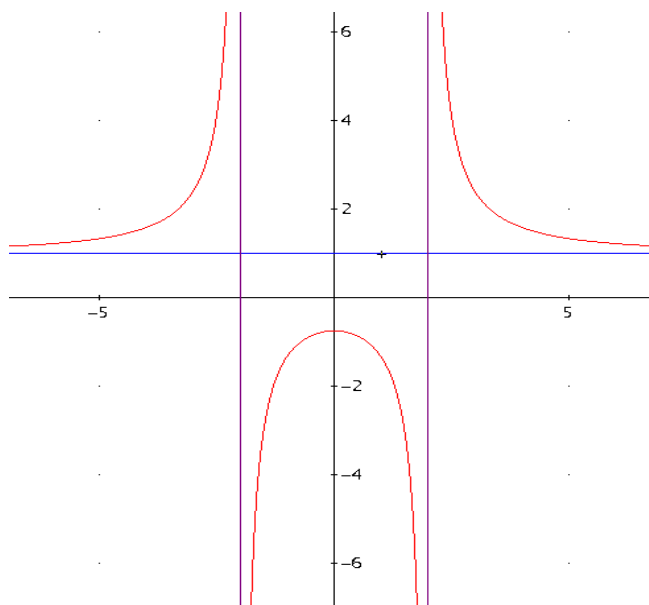
De aquí se deduce que f es creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y decreciente en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$. Además en $x = 0$, f pasa de ser creciente a decreciente, con lo que el punto $x = 0$ es un máximo relativo. En concreto el punto $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$, pues $f(0) = -\frac{3}{4}$.

Obsérvese que no es necesario recurrir al estudio de la segunda derivada para deducir que $x = 0$ es un máximo relativo. En cualquier caso comprobemos que $f''(0) < 0$.

$$f''(x) = \frac{-14(x^2-4)^2 - (-14x)2(x^2-4)2x}{(x^2-4)^4} = \frac{(x^2-4)(-14x^2+56+56x^2)}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{42x^2+56}{(x^2-4)^3} \Rightarrow f''(0) = \frac{42 \cdot 0^2 + 56}{(0^2-4)^3} = \frac{56}{(-4)^3} = \frac{56}{-64} = -\frac{7}{8} < 0 \Rightarrow x = 0 \text{ es un máximo relativo.}$$

d)



4. Halla las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}$

b) $y = \cos \sqrt{\ln x}$

Solución:

a) $y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}} \frac{(\cos x)x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{\operatorname{sen} x}} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \sqrt{\frac{x}{\operatorname{sen} x}} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{2x^2}$

También se puede simplificar así, racionalizando para evitar raíces en el denominador:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}} \frac{(\cos x)x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \frac{\sqrt{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}}{2\frac{\operatorname{sen} x}{x}} \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}}{2\frac{\operatorname{sen} x}{x}} \frac{\cos x}{x} - \frac{\sqrt{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}}{2\frac{\operatorname{sen} x}{x}} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} = \frac{\cos x \sqrt{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}}{2\operatorname{sen} x} - \frac{\sqrt{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}}{2x}$$

$$b) \quad y' = -\operatorname{sen} \sqrt{\ln x} \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \frac{1}{x} = \frac{-\operatorname{sen} \sqrt{\ln x}}{2x\sqrt{\ln x}}$$

5. Halla las siguientes integrales indefinidas:

$$a) \quad \int \frac{x+36}{4+9x^2} dx$$

$$b) \quad \int \frac{\ln x}{x^2} dx$$

Solución:

a) Es inmediata (“logaritmo + arcotangente”) si la descomponemos en otras dos:

$$\int \frac{x+36}{4+9x^2} dx = \int \frac{x}{4+9x^2} dx + \int \frac{36}{4+9x^2} dx$$

$$\int \frac{x}{4+9x^2} dx = \frac{1}{18} \int \frac{18x}{4+9x^2} dx = \frac{1}{18} \ln(4+9x^2) + C$$

$$\int \frac{36}{4+9x^2} dx = \int \frac{9}{1+\frac{9x^2}{4}} dx = \int \frac{9}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2} dx = \frac{2}{3} \int \frac{\frac{3}{2} \cdot 9}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2} dx = 6 \int \frac{\frac{3}{2}}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2} dx = 6 \operatorname{arctg}\left(\frac{3x}{2}\right) + C$$

Por tanto

$$\int \frac{x+36}{4+9x^2} dx = \int \frac{x}{4+9x^2} dx + \int \frac{36}{4+9x^2} dx = \frac{1}{18} \ln(4+9x^2) + 6 \operatorname{arctg}\left(\frac{3x}{2}\right) + C$$

b) Integrando por partes:

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \quad dv = \frac{1}{x^2} dx \\ du = \frac{1}{x} dx \quad v = \frac{-1}{x} \end{array} \right] = \ln x \left(\frac{-1}{x} \right) - \int \left(\frac{-1}{x} \right) \frac{1}{x} dx = \frac{-\ln x}{x} - \int \left(\frac{-1}{x^2} \right) dx =$$

$$= \frac{-\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C = \frac{-\ln x - 1}{x} + C$$

6. Resuelve la ecuación matricial $AXB = B^2$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Multiplicando por la izquierda por la inversa de A y por la derecha por la inversa de B se tiene:
 $A^{-1}AXB = A^{-1}B^2B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}B^2B^{-1}$

Hallemos la inversa de A :

$$\text{Determinante de } A: |A| = (0+0+0) - (-1+0+0) = 1$$

$$\text{Matriz adjunta de } A: A^d = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Traspuesta de la adjunta de } A: (A^d)^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz inversa de } A: A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A^d)^t = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallemos la inversa de B :

$$\text{Determinante de } B: |B| = (1+0+0) - (2+0+0) = -1$$

$$\text{Matriz adjunta de } B: B^d = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Traspuesta de la adjunta de } B: (B^d)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz inversa de } B: B^{-1} = \frac{1}{|B|} (B^d)^t = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Además } B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} X = A^{-1}B^2B^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observa que también lo podríamos haber hecho así y es más rápido:

$$X = A^{-1}B^2B^{-1} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. a) Halla la ecuación general de un plano π que contenga a la recta $r \equiv \begin{cases} x+z=1 \\ y+z=0 \end{cases}$ y

pase por el origen de coordenadas.

- c) Halla las ecuaciones de una recta s contenida en dicho plano, que sea perpendicular a r y que pase por el punto $P(1, 0, 0)$.

Solución:

- a) Es muy fácil pasar la recta a paramétricas. Llamando $z = \lambda$, se tiene claramente $r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$. Por tanto dos

puntos de la recta son, por ejemplo: $A(1, 0, 0)$ y $B(0, -1, 1)$. Como el plano π que se busca debe pasar por el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$, tiene vectores directores $\overrightarrow{OA} = (1, 0, 0)$ y $\overrightarrow{OB} = (0, -1, 1)$. Así pues:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (0+0-z) - (0+y+0) = 0 \Leftrightarrow -y-z=0 \text{ y el plano buscado es } \pi \equiv -y-z=0 \Rightarrow \pi \equiv y+z=0.$$

- b) Un vector perpendicular al plano es $\vec{u} = (0, -1, -1)$. Un vector director de la recta r es $\vec{v} = (-1, -1, 1)$. El producto vectorial de \vec{u} y \vec{v} es un vector \vec{w} que tiene dirección perpendicular al plano determinado por \vec{u} y \vec{v} . Así pues una recta que tenga por vector director \vec{w} será perpendicular a r . Por tanto la recta s que nos piden es aquella cuyo vector director es \vec{w} y pasa por $P(1, 0, 0)$ (observa que $P \subset \pi$, y entonces también $s \subset \pi$).

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-\vec{i} + \vec{j} + 0) - (\vec{k} + 0 + \vec{i}) = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \vec{w} = (-2, 1, -1) \text{ Entonces}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}.$$

