Examen de Matemáticas II – 2º de Bachillerato

1. Dada la función: $f(x)=2x^2-\ln x$

a) Halla su dominio y sus ramas infinitas: $\lim_{x\to 0} f(x)$ y $\lim_{x\to +\infty} f(x)$. ¿Tiene asíntotas verticales? **(1 punto)**

b) Estudia su monotonía y halla sus extremos relativos. **(1 punto)**

c) Realiza una representación gráfica aproximada de la función. **(1 punto)**

2. Calcula los siguientes límites. **(2 puntos; 1 punto por apartado)**

a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{sen\, x\cos x}$

b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$

3. Descomponer el número 8 en dos sumandos positivos de manera que la suma del cubo del primer sumando más el cuadrado del segundo sea mínima. **(1,5 puntos)**

4. Sea la función $f(x)=\dfrac{2-x^2}{x^4}$

a) Comprueba que $f(-1)=f(1)$. **(0,5 puntos)**

b) Comprueba que no existe ningún número $c\in[-1,1]$ tal que $f'(c)=0$. **(0,5 puntos)**

c) ¿Por qué no se cumple el Teorema de Rolle? **(0,5 puntos)**

5. Calcula las siguientes integrales: **(2 puntos; 1 punto por apartado)**

a) $\int \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

b) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}$

Problema para subir nota

Construir un triángulo rectángulo de perímetro 3 cm. con área máxima. **(2 puntos)**

Selectividad Comunidad de Murcia 2006

(1) a) $\text{Dom} f = (0, +\infty)$ (El mismo que el de la función $\ln x$)

* $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} (2x^2 - \ln x) = 0 - (-\infty) = +\infty \Rightarrow \underline{\underline{x = 0}}$ es una asíntota vertical.

* $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x^2 - \ln x) = +\infty$ ($2x^2$ es un infinito de orden superior a $\ln x$

b) $f'(x) = 4x - \frac{1}{x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - \frac{1}{x} = 0$

$\Leftrightarrow 4x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ ó $x = \frac{1}{2}$.

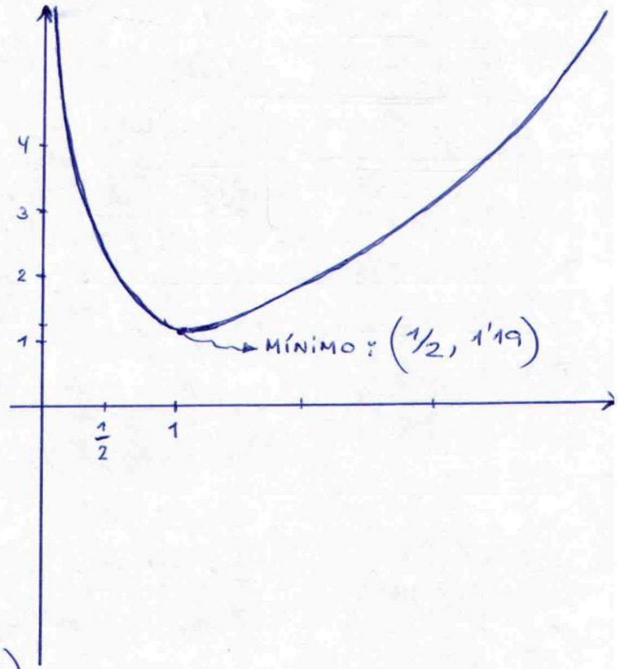
Estos son los posibles extremos.

Se descarta $x = -\frac{1}{2}$ pues no pertenece al dominio de la función.

$f' < 0$ en $(0, \frac{1}{2})$; $f' > 0$ en $(\frac{1}{2}, +\infty)$

* f es decreciente en $(0, \frac{1}{2})$
* f es creciente en $(\frac{1}{2}, +\infty)$
* f tiene un mínimo en $(\frac{1}{2}, 1'19)$

c)



(2) a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x \cos x} = \left[\text{INDET } \frac{0}{0}\right] \underset{\text{L'HÔPITAL}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{1+1}{1-0} = \underline{\underline{2}}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1} \underset{\text{L'HÔPITAL}\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x e^{x^2}}{-\operatorname{sen} x} = \left[\text{INDET } \frac{0}{0}\right] \underset{\text{L'HÔPITAL}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2}}{-\cos x} = \frac{2}{-1} =$

(3) $x + y = 8 \Rightarrow y = 8 - x$. Hemos de minimizar $x^3 + y^2 = x^3 + (8-x)^2$; Llamemos $f(x) = x^3 + (8-x)^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2(8-x) = 3x^2 + 2x - 16$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 16 = 0$, cuyas soluciones son $x = \frac{-8}{3}$ y $x = 2$. Descartamos la primera pues no es positiva.

$f''(x) = 6x + 2$; $f''(2) = 14 > 0 \Rightarrow x = 2$ es un mínimo.

Así pues los sumandos buscados son $\underline{\underline{x = 2}}$, $y = 8 - 2$; $\underline{\underline{y = 6}}$

(4) a) $f(1) = \frac{2 - 1^2}{1^4} = 1$; $f(-1) = \frac{2 - (-1)^2}{(-1)^4} = 1 \Rightarrow f(1) = f(-1)$

b) $f'(x) = \frac{-2x \cdot x^4 - (2 - x^2)4x^3}{x^8} = \frac{2x^5 - 8x^3}{x^8} = 0 \Leftrightarrow 2x^5 - 8x^3 = 0$

$\Leftrightarrow x^3(2x^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = 2,\ x = -2$; 2 y $-2 \notin [-1, 1]$ y f no está definida en $0 \Rightarrow$ no existe $c \in [-1, 1] \,/\, f'(c) = 0$

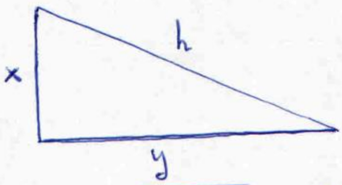
c) Porque f no es continua en el intervalo $[-1,1]$, pues no está definida en $x=0$ y por tanto en este punto no tiene sentido hablar de continuidad (de hecho es una asíntota vertical)

(5) a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx = \int \frac{1}{x}\sqrt{\ln x}\,dx = \int \frac{1}{x}(\ln x)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$

$= \dfrac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} + C.$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}} = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3-3x^2}}{\sqrt{3}}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsen} x + C$

Problema para subir nota:



$\text{Área} = A = \dfrac{xy}{2} = \dfrac{1}{2}xy$

$x+y+h=3 \Rightarrow x+y+\sqrt{x^2+y^2}=3$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 3-x-y \Rightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = (3-x-y)^2 \Rightarrow$

$x^2+y^2 = x^2+y^2+2xy-6x-6y+9 \Rightarrow 0 = 2xy-6x-6y+9 \Rightarrow$

$6x-2xy = -6y+9 \Rightarrow x(6-2y) = -6y+9 \Rightarrow x = \dfrac{-6y+9}{6-2y}$

Sustituimos en la expresión del área:

$A = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{-6y+9}{6-2y}\cdot y = \dfrac{9y-6y^2}{12-4y}\ ;\ A' = \dfrac{(9-12y)(12-4y)-(9y-6y^2)\cdot}{(12-4y)^2}$

$= \dfrac{108-36y-144y+48y^2+36y-24y^2}{(12-4y)^2} = \dfrac{24y^2-144y+108}{(12-4y)^2} =$

$= \dfrac{12(2y^2-12y+9)}{(12-4y)^2} = 0 \Leftrightarrow 2y^2-12y+9=0.$

$\Delta = (-12)^2-4\cdot2\cdot9 = 144-72 = 72.\quad y = \dfrac{12\pm\sqrt{72}}{4} =$

$= \dfrac{12\pm6\sqrt{2}}{4} = \begin{cases} 3+\frac{3}{2}\sqrt{2} \\ 3-\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{cases}$ La primera opción no es válida pues y mediría más de lo que tiene que medir el perímetro.

Por tanto $b = 3-\frac{3}{2}\sqrt{2}$. Sustituyendo en $x = \dfrac{9-6y}{6-2y}$:

$x = \dfrac{9-6\left(3-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)}{6-2\left(3-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)} = \dfrac{9-18+9\sqrt{2}}{6-6+3\sqrt{2}} = \dfrac{9\sqrt{2}-9}{3\sqrt{2}} = 3-\dfrac{3}{2}\sqrt{2}.$

Entonces los catetos del triángulo rectángulo de perímetro 3 y área máxima son iguales, y miden $3-\frac{3}{2}\sqrt{2}$ cm.