Examen de Matemáticas II – 2º de Bachillerato

1. Calcula los siguientes límites *(no se pueden hacer utilizando la regla de L'Hôpital)*. **(2 puntos; 1 punto por apartado)**

a) $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(3-\dfrac{2x^2}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{x}}$

2. Determinar *a* y *b* para que $f(x)=\begin{cases} e^x+a & si \quad x\le 0 \\ ax^2+2 & si \quad 0<x\le 1 \\ \dfrac{b}{2x} & si \quad x>1 \end{cases}$ sea continua en $x=0$ y $x=1$. **(0,5 puntos)**

Para los valores de a y b obtenidos anteriormente, estudiar la derivabilidad de $f(x)$ en $x=0$. **(0,5 puntos)**

3. Halla las derivadas de las siguientes funciones y simplifica en la medida de lo posible el resultado: **(3 puntos; 1 punto por apartado)**

a) $y=\sqrt{x\sqrt{x+1}}$

b) $y=\ln\dfrac{1+sen\,x}{1-sen\,x}$

c) $y=(\operatorname{sen} x)^{\cos x}$

4. Hallar un punto de la gráfica de la función $y=x^2+x+5$ en el cual la recta tangente sea paralela a la recta $y=3x+8$. **(1 punto)**

5. Dada la función: $y=\dfrac{x^4}{x^2-1}$

a) Halla su dominio y sus asíntotas verticales. **(1 punto)**
b) Estudia su monotonía y halla sus extremos relativos. **(1 punto)**
c) Realiza una representación gráfica aproximada de la función. **(1 punto)**

① a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}=\left[\text{Indet. } \dfrac{0}{0}\right]\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+6}+3)}{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+6}+3)}{x+6-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+6}+3)}{x-3}=$

$=\left[\text{Indet. } \dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+1-4)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\cancel{(x-3)}(\sqrt{x+6}+3)}{\cancel{(x-3)}(\sqrt{x+1}+2)}=\dfrac{6}{4}=\underline{\underline{\dfrac{3}{2}}}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\dfrac{2x^2}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{x}}=[\text{Indet. } 1^\infty]$. Llamemos

$f(x)=3-\dfrac{2x^2}{x^2-1}$ y $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$. Entonces si

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-1)\cdot g(x)=L$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)^{g(x)}=e^L$:

$(f(x)-1)g(x)=\left(3-\dfrac{2x^2}{x^2-1}-1\right)\dfrac{x^2-1}{x}=\dfrac{-2}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^2-1}{x}=\dfrac{-2}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{x}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\dfrac{2x^2}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{x}}=\underline{\underline{e^0=1}}$

② $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=1+a\\ \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=2\end{array}\right\}\Rightarrow 1+a=2\Rightarrow\underline{\underline{a=1}}$. En este caso:

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=1+2=3\\ \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\dfrac{b}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow 3=\dfrac{b}{2}\Rightarrow\underline{\underline{b=6}}$

$f'(x)=\begin{cases}e^x & \text{si } x<0\\ 2x & \text{si } 0<x<1\\ \dfrac{-3}{x^2} & \text{si } x>1\end{cases}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)=1\\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=0\end{array}\right\}$

$\Rightarrow f$ no es derivable en $x=0$

③ a) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x\sqrt{x+1}}}\cdot\left(\sqrt{x+1}+x\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)=$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{x\sqrt{x+1}}}\cdot\dfrac{2(x+1)+x}{2\sqrt{x+1}}=\dfrac{3x+2}{4\sqrt{x(x+1)\sqrt{x+1}}}=\dfrac{(3x+2)\sqrt{x\sqrt{x+1}}}{4x(x+1)}$

b) $y' = \dfrac{1}{\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}} \cdot \dfrac{\cos x(1-\operatorname{sen}x) - (1+\operatorname{sen}x)(-\cos x)}{(1-\operatorname{sen}x)^2} =$

$= \dfrac{(1-\operatorname{sen}x)\cdot(\cos x - \cos x\operatorname{sen}x + \cos x + \operatorname{sen}x\cos x)}{(1+\operatorname{sen}x)(1-\operatorname{sen}x)^2} = \dfrac{2\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x} =$

$= \dfrac{2\cos x}{\cos^2 x} = \dfrac{2}{\cos x} = \underline{\underline{2\sec x}}$

c) $\ln y = \cos x \ln(\operatorname{sen}x) \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = -\operatorname{sen}x\ln(\operatorname{sen}x) + \cos x\,\dfrac{1}{\operatorname{sen}x}\cdot\cos x$

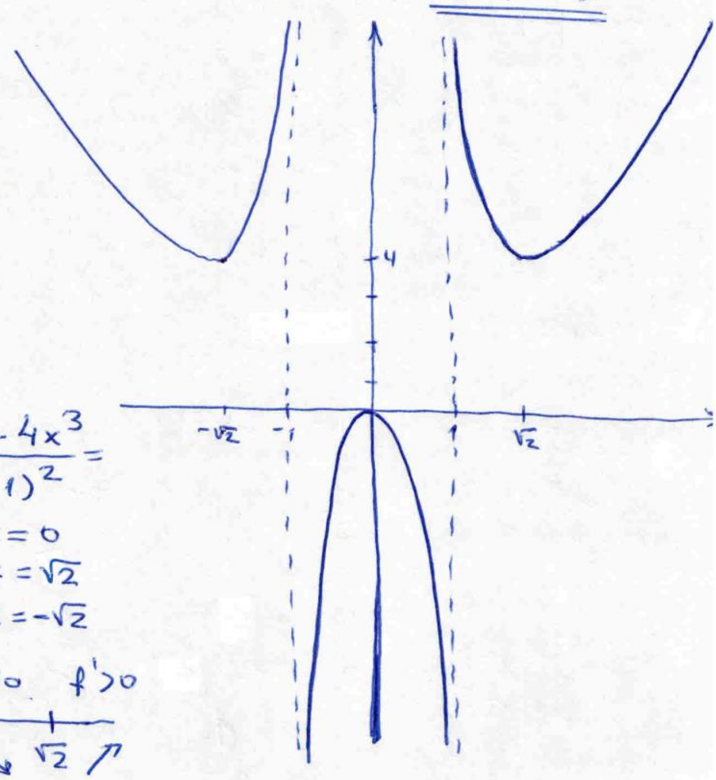
$\Rightarrow \dfrac{y'}{y} = -\operatorname{sen}x\ln(\operatorname{sen}x) + \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}x} \Rightarrow \underline{\underline{y' = \dfrac{-\operatorname{sen}^2 x\ln(\operatorname{sen}x) + \cos^2 x}{\operatorname{sen}x}\cdot(\operatorname{sen}x)^{\cos x}}}$

4) La derivada $y' = 2x+1$ debe coincidir con la pendiente de la recta $m = 3$, para que ésta y la tangente sean paralelas: $2x+1 = 3 \Rightarrow \underline{x = 1}$

El punto de la gráfica es por tanto el $\underline{\underline{(1, 7)}}$

5) $y = \dfrac{x^4}{x^2-1}$

c)



a) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{1, -1\}$

$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^4}{x^2-1} = \infty = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \to -1^- \\ -\infty & \text{si } x \to -1^+ \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4}{x^2-1} = \infty = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \to 1^- \\ +\infty & \text{si } x \to 1^+ \end{cases}$

$\underline{x=-1}$ y $\underline{x=1}$ son asíntotas verticales.

b) $y' = \dfrac{4x^3(x^2-1) - x^4\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2x^5-4x^3}{(x^2-1)^2} =$

$= \dfrac{x^3(2x^2-4)}{(x^2-1)^2}$. $y' = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$

$f'<0$	$f'>0$	$f'>0$	$f'<0$	$f'<0$	$f'>0$
$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$-\sqrt{2}$ $\quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad \sqrt{2}$

f es creciente en $(-\sqrt{2}, -1) \cup (-1, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

f es decreciente en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, 1) \cup (1, \sqrt{2})$

f tiene dos mínimos $(-\sqrt{2}, 4)$ y $(\sqrt{2}, 4)$

f tiene un máximo $(0, 0)$