Examen de Matemáticas II – 2º de Bachillerato

1. Calcula los siguientes límites *(no se pueden hacer utilizando la regla de L'Hôpital)*. **(2 puntos; 1 punto por apartado)**

a) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$

2. Determinar a y b para que $f(x)=\begin{cases} 2x^3+ax^2-1 & si \quad x\le -1 \\ \dfrac{a}{2x} & si \quad -1<x\le 1 \\ e^{x-1}+2b & si \quad x>1 \end{cases}$ sea continua en $x=-1$ y $x=1$.

(0,5 puntos)

Para los valores de a y b obtenidos anteriormente, estudiar si $f\left(x\right)$ es derivable en $x=1$. **(0,5 puntos)**

3. Halla las derivadas de las siguientes funciones y simplifica en la medida de lo posible el resultado: **(3 puntos; 1 punto por apartado)**

a) $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$

b) $y=\operatorname{sen} x\cdot e^{\cos x}$

c) $y=x^{\ln x}$

4. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x-\dfrac{1}{x}$ en el punto $x_0=-\dfrac{1}{2}$. **(1 punto)**

5. Dada la función: $y=\dfrac{x^3}{1-x}$

a) Halla su dominio y sus asíntotas verticales. **(0,5 puntos)**

b) Estudia su monotonía y halla sus extremos relativos. **(1 punto)**

c) Estudia su curvatura y halla sus puntos de inflexión. **(1 punto)**

d) Realiza una representación gráfica aproximada de la función. **(0,5 puntos)**

1) a) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \left[\text{INDET } \dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} =$

$= \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} =$

$= \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \dfrac{1}{2+2} = \underline{\underline{\dfrac{1}{4}}}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}} = [\text{INDET } 1^{\infty}]$;

Llamemos $f(x) = \dfrac{3x-4}{3x+2}$; $g(x) = \dfrac{x+1}{3}$

Entonces si $\lim\limits_{x\to -\infty} (f(x)-1)\,g(x) = L \Rightarrow \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)^{g(x)} = e^{L}$;

$(f(x)-1)\,g(x) = \left(\dfrac{3x-4}{3x+2} - 1\right)\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{-6}{3x+2}\cdot\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{-2x-2}{3x+2}$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-2x-2}{3x+2} = -\dfrac{2}{3} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}} = e^{-\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\dfrac{1}{\sqrt[3]{e^2}}}}$

2) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -2+a-1 = a-3 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \dfrac{a}{-2} \end{array}\right\}$ para que exista $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ debe

ser $a-3 = \dfrac{a}{-2} \Rightarrow -2a+6 = a \Rightarrow \underline{\underline{a=2}}$. En este caso

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1)$ y f es continua en $x=-1$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \dfrac{a}{2} = 1 \quad (a=2) \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1+2b \end{array}\right\}$. Razonando como antes:

$1 = 1+2b \Rightarrow \underline{\underline{b=0}}$. La función queda así:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3+2x^2-1 & \text{si } x\le -1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } -1<x\le 1 \\ e^{x-1} & \text{si } x>1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 6x^2+4x & \text{si } x<-1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{si } -1<x<1 \\ e^{x-1} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = -\dfrac{1}{1^2} = -1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = e^{1-1} = 1 \end{array}\right\}$ como las derivadas laterales son distintas, f no es derivable en $x=1$.

3 a) $$y' = \frac{-\frac{1}{x}(1+\ln x) - (1-\ln x)\frac{1}{x}}{(1+\ln x)^2} = \frac{-\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}}{(1+\ln x)^2} =$$

$$= \frac{-\frac{2}{x}}{(1+\ln x)^2} = \underline{\underline{\frac{-2}{x(1+\ln x)^2}}}$$

b) $$y' = \cos x\, e^{\cos x} + \operatorname{sen} x\, e^{\cos x}(-\operatorname{sen} x) = \cos x\, e^{\cos x} - \operatorname{sen}^2 x\, e^{\cos x} =$$

$$= \underline{\underline{e^{\cos x}(\cos x - \operatorname{sen}^2 x)}}$$

c) $$\ln y = \ln x \cdot \ln x = \ln^2 x \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2\ln x \, \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y' = \frac{2\ln x}{x} \cdot x^{\ln x}}}$$

4 $$\left.\begin{array}{l} y' = 1 + \frac{1}{x^2} \; ; \; y'\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{(-1/2)^2} = 5 \\ y\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{-1/2} = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} \end{array}\right\}$$ Recta tangente:

$$y - y\left(-\frac{1}{2}\right) = y'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \Rightarrow y - \frac{3}{2} = 5\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y = 5x + \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \Rightarrow \underline{\underline{y = 5x + 4}}$$

5 Dominio $= \mathbb{R} - \{1\}$

a) $$\lim_{x \to 1} \frac{x^3}{1-x} = \infty = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \to 1^- \\ -\infty & \text{si } x \to 1^+ \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\underline{x = 1}$ es una Asíntota Vertical

b) $$y' = \frac{3x^2(1-x) - x^3(-1)}{(1-x)^2} = \frac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x^3 = 0 \Leftrightarrow x^2(3-2x) = 0$$

$\Leftrightarrow$ $\underline{x = 0}$ ó $\underline{x = \frac{3}{2}}$ (posibles extremos)

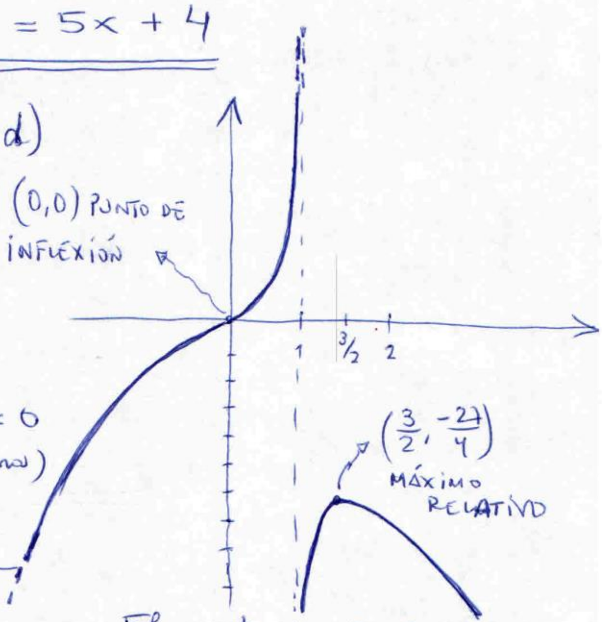
$$\begin{array}{ccccccc} f' > 0 & & f' > 0 & & f' > 0 & & f' < 0 \\ \nearrow & 0 & \nearrow & 1 & \nearrow & \frac{3}{2} & \searrow \end{array}$$

* f es creciente en $(-\infty, 1) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right)$
* f es decreciente en $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

En $x = \frac{3}{2}$ hay un MÁXIMO RELATIVO $\left(\frac{3}{2}, \frac{-27}{4}\right)$

$$y'' = \frac{(6x - 6x^2)(1-x)^2 - (3x^2 - 2x^3)2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} =$$

d)



El punto $x = 0$ es un PUNTO DE INFLEXIÓN: $(0,0)$

$$\begin{array}{ccccc} f'' < 0 & & f'' > 0 & & f'' < 0 \\ \frown & 0 & \smile & 1 & \frown \end{array}$$

* f es convexa