# Examen de Matemáticas II – 2º de Bachillerato

**1.** Calcula los siguientes límites. **(2 puntos; 1 punto por apartado)**

**a)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$

**b)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{3x^2-2x+1}{3x^2-1}\right)^{\frac{x^2-2}{4x}}$

**2.** Dada la función $f(x)=\begin{cases} kx^2-8 & si \quad x<3 \\ \ln(x-2)+1 & si \quad x\geq 3\end{cases}$

**a)** Halla razonadamente el valor de *k* para que *f* sea continua en $x=3$. **(0,5 puntos)**

**b)** Para el valor obtenido de *k*, ¿es *f* derivable en $x=3$? ¿Qué aspecto tendrá la gráfica de la función en el punto (2, 3)? **(0,5 puntos)**

**3.** Halla las derivadas de las siguientes funciones y simplifica en la medida de lo posible el resultado: **(3 puntos; 1 punto por apartado)**

**a)** $y=\cos\sqrt{\ln x}$

**b)** $y=\sqrt{\dfrac{sen\, x}{x}}$

**c)** $y=\left(\dfrac{1}{\text{sen}\, x}\right)^{\cos x}$

**4.** Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y=\dfrac{2x-1}{3x-3}$ en el punto $x_0=2$. **(1 punto)**

**5.** Dada la función: $y=\dfrac{x}{e^x}$

**a)** Halla su dominio y sus asíntotas verticales. **(0,5 puntos)**

**b)** Estudia su monotonía y halla sus extremos relativos. **(1 punto)**

**c)** Estudia su curvatura y halla sus puntos de inflexión. **(1 punto)**

**d)** Realiza una representación gráfica aproximada de la función. **(0,5 puntos)**

1 a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1} = \left[\text{INDET } \dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}{\sqrt{x^2+1}^2-1^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2+1-1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x^2+1}+1) = \underline{\underline{2}}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{3x^2-2x+1}{3x^2-1}\right)^{\frac{x^2-2}{4x}} = [\text{INDET } 1^\infty] = e^L$, donde

$L = \lim\limits_{x\to -\infty}\left[\left(\dfrac{3x^2-2x+1}{3x^2-1}-1\right)\dfrac{x^2-2}{4x}\right] = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{-2x+2}{3x^2-1}\cdot\dfrac{x^2-2}{4x}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-2x^3+2x^2+4x-4}{12x^3-4x} = \dfrac{-2}{12} = \dfrac{-1}{6} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{3x^2-2x+1}{3x^2-1}\right)^{\frac{x^2-2}{4x}} = \underline{\underline{e^{-\frac{1}{6}}}}$

2 a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}(kx^2-8) = 9k-8 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}[\ln(x-2)+1] = 1 \end{array}\right\}$ Para que $f$ sea continua

en $x=2$ deben ser iguales $\Rightarrow 9k-8=1 \Rightarrow 9k=9 \Rightarrow \underline{\underline{k=1}}$

En este caso $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 1 = f(3)$ y $f$ es continua en $x=3$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2-8 & \text{si } x<3 \\ \ln(x-2)+1 & \text{si } x\geq 3 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x<3 \\ \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x>3 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = \lim\limits_{x\to 3^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} 2x = 6 \\ f'(3^+) = \lim\limits_{x\to 3^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-2} = 1 \end{array}\right\}$ como no coinciden las

derivadas laterales $\Rightarrow$ $\underline{\underline{f \text{ no es derivable en } x=3}}$.

3 a) $y' = -\text{sen}\sqrt{\ln x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\dfrac{1}{x} = \underline{\underline{-\dfrac{\text{sen}\sqrt{\ln x}}{2x\sqrt{\ln x}}}}$.

b) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{\text{sen}x}{x}}}\cdot\dfrac{\cos x\cdot x - \text{sen}x\cdot 1}{x^2} = \dfrac{x\cos x-\text{sen}x}{2x^2\sqrt{\dfrac{\text{sen}x}{x}}} =$

$= \dfrac{x\cos x-\text{sen}x}{2\sqrt{\dfrac{x^4\,\text{sen}x}{x}}} = \underline{\underline{\dfrac{x\cos x-\text{sen}x}{2\sqrt{x^3\,\text{sen}x}}}}$

c) $\ln y = \ln\left(\frac{1}{\operatorname{sen}x}\right)^{\cos x} \Rightarrow \ln y = \cos x \cdot \ln\frac{1}{\operatorname{sen}x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln y = \cos x \cdot (\ln 1 - \ln \operatorname{sen}x) \Rightarrow \ln y = \cos x \cdot (-\ln \operatorname{sen}x)$

$\Rightarrow \frac{y'}{y} = -\operatorname{sen}x \cdot (-\ln \operatorname{sen}x) + \cos x \cdot \left(-\frac{1}{\operatorname{sen}x}\right) \cdot \cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \operatorname{sen}x \ln \operatorname{sen}x - \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}x} \Rightarrow y' = \left[\operatorname{sen}x \ln \operatorname{sen}x - \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}x}\right] \ln\left(\frac{1}{\operatorname{sen}x}\right)^{\cos x}$

4) Recta tangente: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$; $x_0 = 2$, $y_0 = 1$

$f'(x) = \frac{2(3x-3) - (2x-1)\cdot 3}{(3x-3)^2} = \frac{6x - 6 - 6x + 3}{(3x-3)^2} = \frac{-3}{(3x-3)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(2) = \frac{-3}{3^2} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$.

Entonces $y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow 3y - 3 = -x + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{x + 3y - 5 = 0}$ (ecuación general de la recta tangente)

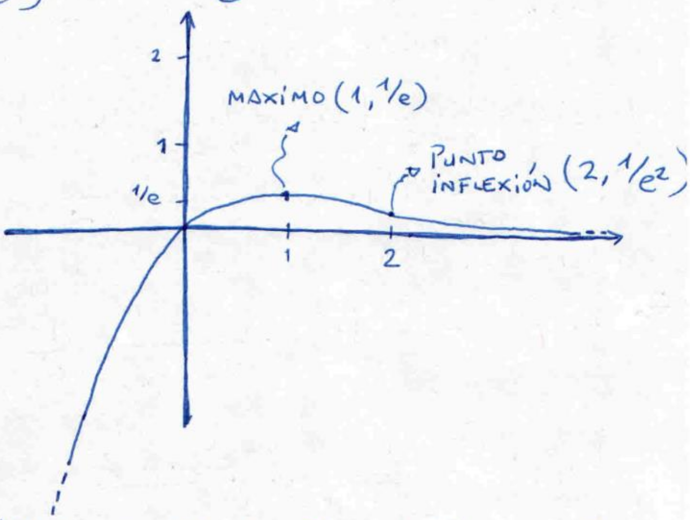
5) a) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$. No tiene asíntotas verticales pues $e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - x e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow \underline{x = 1}$

$f' > 0$ | $f' < 0$ (en 1)

$\nearrow$ 1 $\searrow$




* $f$ es creciente en $(-\infty, 1)$
* $f$ es decreciente en $(1, +\infty)$
* $f$ tiene un máximo en $x = 1$ : $(1, 1/e)$

c) $f''(x) = \frac{-1 \cdot e^x - (1-x)e^x}{(e^x)^2} =$

$= \frac{-1 - 1 + x}{e^x} = \frac{x-2}{e^x}$. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 2}}$

$f'' < 0$ | $f'' > 0$ (en 2)

$\cap$ 2 $\cup$

* $f$ es convexa en $(-\infty, 2)$
* $f$ es cóncava en $(2, +\infty)$
* $f$ tiene un punto de inflexión en $x = 2$: $(2, 2/e^2)$