Examen de Matemáticas II – 2º de Bachillerato

1. Calcula los siguientes límites. **(2 puntos; 1 punto por apartado)**

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$

b) $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{2x^2-3}{4}}$

2. Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & si \quad x<2 \\ e^{2-x}+2 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$

a) Halla razonadamente el valor de *a* para que *f* sea continua en $x=2$. **(0,5 puntos)**

b) Para el valor obtenido de *a*, ¿es *f* derivable en $x=2$? ¿Qué aspecto tendrá la gráfica de la función en el punto (2, 3)? **(0,5 puntos)**

3. Halla las derivadas de las siguientes funciones y simplifica en la medida de lo posible el resultado: **(3 puntos; 1 punto por apartado)**

a) $y=\ln\sqrt{\cos x}$

b) $y=\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

4. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y=\frac{x+1}{x-1}$ en el punto $x_0=2$. **(1 punto)**

5. Dada la función: $y=\frac{x}{\ln x}$

a) Halla su dominio y sus asíntotas verticales. **(0,5 puntos)**

b) Estudia su monotonía y halla sus extremos relativos. **(1 punto)**

c) Estudia su curvatura y halla sus puntos de inflexión. **(1 punto)**

d) Realiza una representación gráfica aproximada de la función. **(0,5 puntos)**

1) a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}=\left[\text{INDET } \frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}=$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1-1}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{1}{2}$

b) $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{2x^2-3}{4}}=\left[1^\infty\text{: indeterminación}\right]$

* $\lim_{x\to -\infty}\left[\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}-1\right)\frac{2x^2-3}{4}\right]=\lim_{x\to -\infty}\frac{2(2x^2-3)}{4(x^2-1)}=\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2-3}{2(x^2-1)}=$

$=\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2-3}{2x^2-2}=1$. Entonces $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{2x^2-3}{4}}=e^1=e$

2) a) $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(ax^2+1)=4a+1\\ \lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}(e^{2-x}+2)=3\end{array}\right\}$ Para que f sea continua

en $x=2$ deben ser iguales $\Rightarrow 4a+1=3 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

En este caso $\lim_{x\to 2}f(x)=3=f(2) \Rightarrow f$ es continua en $x=2$.

b) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+1 & \text{si } x<2\\ e^{2-x}+2 & \text{si } x\geq 2\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}x & \text{si } x<2\\ -e^{2-x} & \text{si } x>2\end{cases}$

$\left.\begin{array}{l}f'(2^-)=\lim_{x\to 2^-}f'(x)=\lim_{x\to 2^-}x=2\\ f'(2^+)=\lim_{x\to 2^+}f'(x)=\lim_{x\to 2^+}(-e^{2-x})=-1\end{array}\right\}$ como no coinciden

las derivadas laterales, entonces f no es derivable en $x=2$.

* En el punto $(2,3)$ la gráfica tendrá un "pico" o un "punto anguloso" al no ser derivable en $x=2$.

3) a) $y'=\frac{1}{\sqrt{\cos x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\cos x}}\cdot(-\operatorname{sen}x)=\frac{-\operatorname{sen}x}{2\sqrt{\cos x}^2}=\frac{-\operatorname{sen}x}{2\cos x}=$

$=-\frac{1}{2}\operatorname{tg}x$

b) $$y' = \frac{-1\sqrt{1-x^2} - (1-x)\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{\sqrt{1-x^2}^{\,2}} = \frac{-\sqrt{1-x^2} + \frac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} =$$

$$= \frac{\frac{-(1-x^2) + x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{x-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \underline{\underline{\frac{x-1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}}}$$

c) $$\ln y = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \ln y = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{x^2}{x+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \Rightarrow \underline{\underline{y' = \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right]\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}}$$

4) Recta tangente: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$; $x_0 = 2$, $y_0 = 3$

$$f'(x) = \frac{1(x-1) - (x+1)1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(2) = -2$$

Entonces: $y - 3 = -2(x-2) \Rightarrow y - 3 = -2x + 4 \Rightarrow \underline{\underline{y = -2x + 7}}$

5) a) El $\ln x$ está definido en $(0,+\infty)$. Además $\ln 1 = 0$.
Entonces $\text{Dom} f = (0,+\infty) - \{1\} = (0,1)\cup(1,+\infty)$
En $x = 1$ hay una Asíntota Vertical pues $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{\ln x} = \infty$.

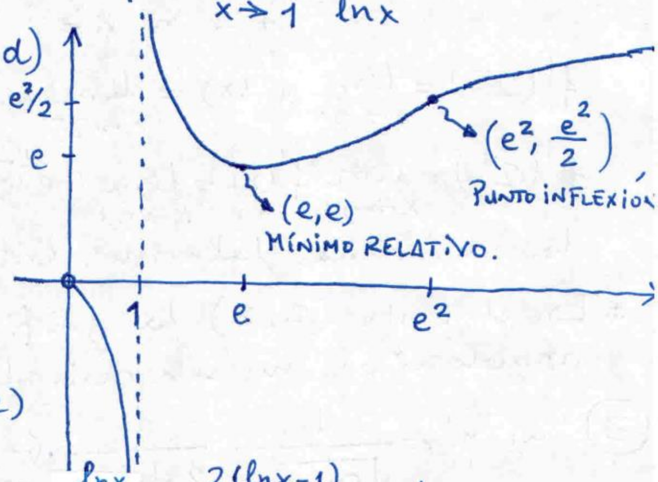
b) $$f'(x) = \frac{1\ln x - x\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = e$

x	$(0,1)$	$(1,e)$	$(e,+\infty)$
f'	$f'<0$	$f'<0$	$f'>0$
f	↘	↘	↗

* f es decreciente en $(0,1)\cup(1,e)$
* f es creciente en $(e,+\infty)$
* f tiene un mínimo en $x = e$: (e,e)

d)



c) $$f''(x) = \frac{\frac{1}{x}\ln^2 x - (\ln x - 1)\,2\ln x\,\frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{\frac{\ln x}{x} - \frac{2(\ln x - 1)}{x}}{\ln^3 x} = \frac{\ln x - 2(\ln x - 1)}{x\cdot\ln^3 x}$$

$$= \frac{2 - \ln x}{x\cdot\ln^3 x} \Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^2$$

x	$(0,1)$	$(1,e^2)$	$(e^2,+\infty)$
f''	$f''<0$	$f''>0$	$f''<0$
f	∩	∪	∩

* f es convexa en $(0,1)\cup(e^2,+\infty)$
* f es cóncava en $(1,e^2)$
* f tiene un punto de inflexión en $x = e^2$: $\left(e^2, \frac{e^2}{2}\right)$