Examen de Matemáticas II – 2º de Bachillerato

1. Dada la función $f(x)=\dfrac{-x^2+4}{x^2+2x-3}$, contesta a los siguientes apartados:

a) Halla su dominio y los puntos de corte con los ejes. **(1 punto)**

b) Halla las asíntotas verticales y horizontales. **(1 punto)**

c) Haz una representación gráfica aproximada de la función utilizando los apartados anteriores (sin necesidad de tabla de valores). **(1 punto)**

2. Calcula los siguientes límites. **(4 puntos; 1 punto por apartado)**

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2-\sqrt{4x^4+2x^2+1}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^x$

c) $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\dfrac{x}{x-2}\cdot\sqrt{x^2-x-2}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^3-6x^2}{4x^3-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

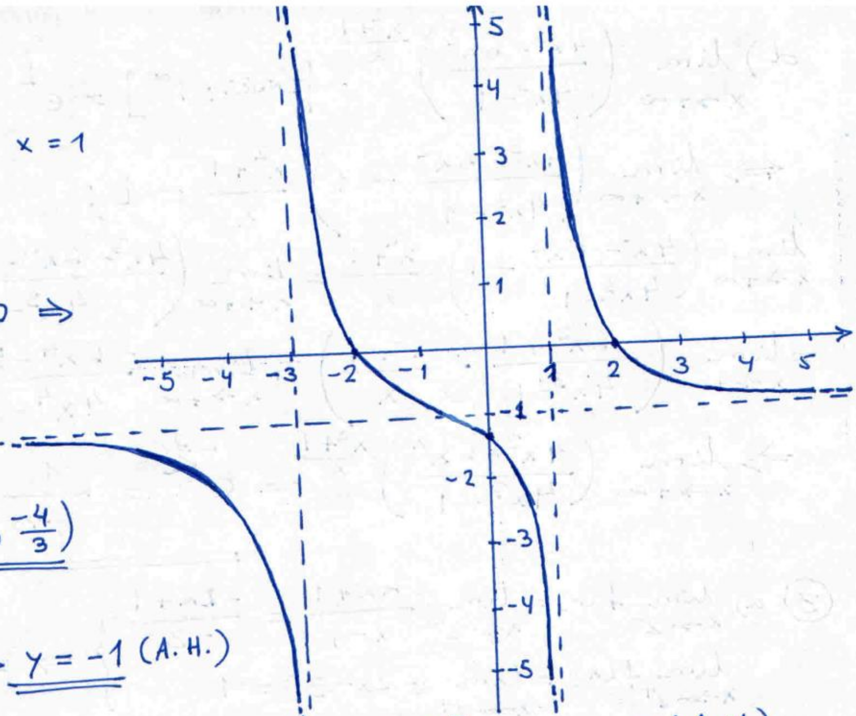
3. Sea la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{kx+1}{x-1} & si \quad x<-2\\ -2x-3 & si \quad -2\le x<1\\ 3 & si \quad x=1\\ x^2+x-7 & si \quad x>1\end{cases}$

a) Halla razonadamente el valor de k para que f sea continua en $x=-2$. **(1 punto)**

b) Estudia la continuidad de f en $x=4$. Caso de no ser continua di que tipo de discontinuidad es, razonando la respuesta. **(1 punto)**

4. Encuentra tres intervalos que no tengan elementos en común (disjuntos), en cada uno de los cuales la ecuación $2x^4-14x^2+14x-1=0$ tenga una raíz. **(1 punto)**

① $f(x) = \dfrac{-x^2+4}{x^2+2x-3}$



a) $x^2+2x-3=0 \Rightarrow x=-3$ ó $x=1$

$\Rightarrow \text{Dom} f = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$

* Puntos de corte eje X:

$\dfrac{-x^2+4}{x^2+2x-3} = 0 \Rightarrow -x^2+4=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$: $(2,0)$; $(-2,0)$

* Punto de corte eje Y:

$x=0 \Rightarrow f(x) = -\dfrac{4}{3}$: $\left(0, \dfrac{-4}{3}\right)$

b) Asíntota horizontal:

$\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x^2+4}{x^2+2x-3} = -1 \Rightarrow y=-1$ (A. H.)

Asíntotas verticales:

$\lim_{x\to -3} \dfrac{-x^2+4}{x^2+2x-3} = \left[\dfrac{-5}{0} = \infty\right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } x\to -3^- \\ +\infty & \text{si } x \to -3^+ \end{cases} \Rightarrow x=-3$ (A.V.)

$\lim_{x\to 1} \dfrac{-x^2+4}{x^2+2x-3} = \left[\dfrac{3}{0} = \infty\right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } x\to 1^- \\ +\infty & \text{si } x \to 1^+ \end{cases} \Rightarrow x=1$ (A.V.)

② a) $\lim_{x\to+\infty}\left(2x^2 - \sqrt{4x^4+2x^2+1}\right) = [\text{INDET}: \infty - \infty] =$

$= \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\left(2x^2-\sqrt{4x^4+2x^2+1}\right)\cdot\left(2x^2+\sqrt{4x^4+2x^2+1}\right)}{2x^2+\sqrt{4x^4+2x^2+1}} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \dfrac{4x^4-(4x^4+2x^2+1)}{2x^2+\sqrt{4x^4+2x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^2-1}{2x^2+\sqrt{4x^4+2x^2+1}} = \dfrac{-2}{2+2} = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2}$

b) $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^x = (1+1)^{-\infty} = 2^{-\infty} = \dfrac{1}{2^\infty} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

c) $\lim_{x\to 2^+}\left(\dfrac{x}{x-2}\sqrt{x^2-x-2}\right) = [\infty \cdot 0 : \text{INDET}]$ (introducimos todo dentro del radical) $= \lim_{x\to 2^+} \sqrt{\dfrac{x^2(x^2-x-2)}{(x-2)^2}} = \left[\text{INDET } \dfrac{0}{0}\right] =$ (aplicamos RUFFINI)

$= \lim_{x\to 2^+} \sqrt{\dfrac{x^2(x+1)(x-2)}{(x-2)^2}} = \lim_{x\to 2^+}\sqrt{\dfrac{x^2(x+1)}{x-2}} = +\infty$

$\sqrt{\dfrac{2^2\cdot(2+1)}{0^+}} = \sqrt{\dfrac{12}{0^+}} = \sqrt{+\infty}$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^3-6x^2}{4x^3-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = [\text{INDET}: 1^\infty] = e^L \iff$

$\iff \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^3-6x^2}{4x^3-1}-1\right)\frac{x^2+1}{x} = L;$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^3-6x^2}{4x^3-1}-1\right)\frac{x^2+1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^3-6x^2-4x^3+1}{4x^3-1}\cdot\frac{x^2+1}{x}\right) =$

$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-6x^2+1}{4x^3-1}\cdot\frac{x^2+1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-6x^4-5x^2+1}{4x^4-x} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^3-6x^2}{4x^3-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = e^{-3/2} = \frac{1}{e^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$

③ a) $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-}\frac{kx+1}{x-1} = \frac{-2k+1}{-3} \\ \lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+}(-2x-3) = 1\end{array}\right\} \Rightarrow$ para que exista el límite cuando $x\to-2$, los límites laterales deben ser iguales: $\frac{-2k+1}{-3} = 1$ $\Rightarrow -2k+1 = -3 \Rightarrow -2k = -4 \Rightarrow \underline{k=2}$. En este caso $\lim_{x\to-2} f(x) = f(-2) = 1$ y f es continua en $x=-2$.

b) En $x=4$ la función es continua pues se trata de una función polinómica $f(x) = x^2+x-7$ y se cumple que $\lim_{x\to4} f(x) = f(4) = 13$. Donde puede haber algún problema con la continuidad es en el punto $x=1$.

④ Sea $f(x) = 2x^4-14x^2+14x-1$. f es continua en todo $\mathbb{R}$.

Además:
$f(-4) = 231$; $f(-3) = -7$; $f(0) = -1$; $f(1) = 1$; $f(3/2) = -11/8$

Entonces existen tres intervalos: $(-4,-3)$; $(0,1)$; $(1,\frac{3}{2})$ en cada uno de los cuales se anula la función.

Es decir existen $c_1 \in (-4,-3)$; $c_2 \in (0,1)$ y $c_3 \in (1,\frac{3}{2})$ tales que $f(c_1)=0$, $f(c_2)=0$ y $f(c_3)=0$ (BOLZANO)

Por tanto c_1, c_2 y c_3 son soluciones de la ecuación $2x^4-14x^2+14x-1=0$.