Examen de Matemáticas II – 2º de Bachillerato

1. Dada la función $f(x)=\dfrac{2x^2-6}{x^2-x-6}$, contesta a los siguientes apartados:

a) Halla su dominio y los puntos de corte con los ejes. **(1 punto)**

b) Halla las asíntotas verticales y horizontales. **(1 punto)**

c) Haz una representación gráfica aproximada de la función utilizando los apartados anteriores (sin necesidad de tabla de valores). **(1 punto)**

2. Calcula los siguientes límites. **(4 puntos; 1 punto por apartado)**

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x+2+x^2}+x^2\right)$

b) $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{\sqrt{x^2-2x-3}}{4x-12}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{2}{x^2-9}}\cdot(x-3)\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-2x-7}\right)^{\frac{x^2}{x-1}}=$

3. Sea la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+4}{kx-1} & si \quad x<-1\\ -2x+2 & si \quad -1\leq x<4\\ \dfrac{-x^2+2x+8}{x-4} & si \quad x\geq 4\end{cases}$

a) Halla razonadamente el valor de k para que f sea continua en $x=-1$. **(1 punto)**

b) Estudia la continuidad de f en $x=4$. **(1 punto)**

4. Utiliza el Teorema de Bolzano para demostrar que la ecuación $x^3-7x^2+7x+15=0$ tiene al menos dos soluciones y describe los intervalos en los que ambas se encuentran. **(1 punto)**

① $f(x)=\dfrac{2x^2-6}{x^2-x-6}$

a) $x^2-x-6=0 \Rightarrow x=-2$ ó $x=3$

$\Rightarrow \text{Dom} f = \mathbb{R}-\{-2,3\}$

* Puntos de corte eje X:

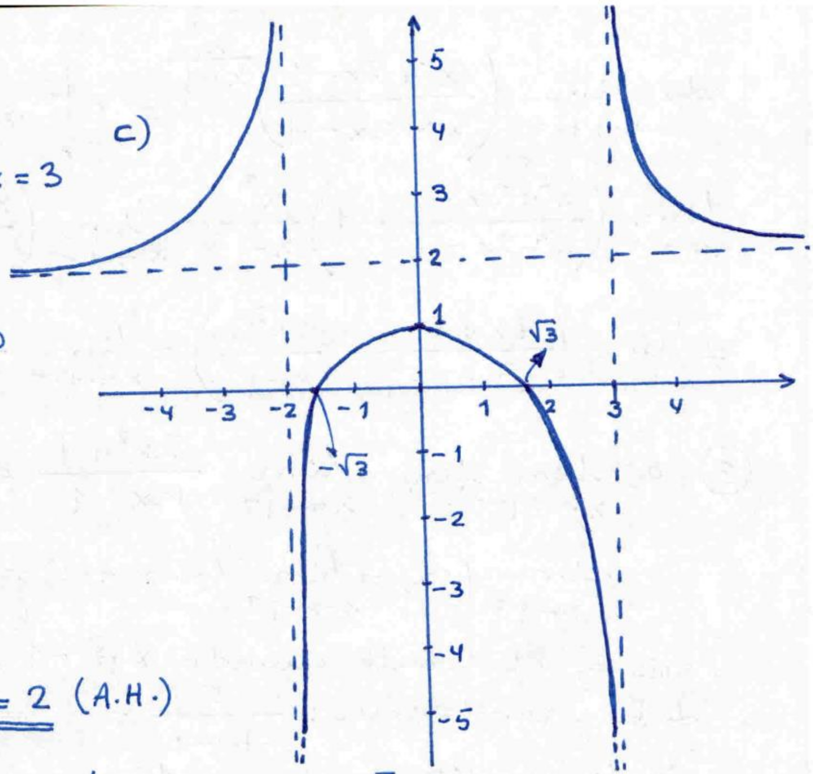
$\dfrac{2x^2-6}{x^2-x-6}=0 \Rightarrow 2x^2-6=0$

$\Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$: $(\sqrt{3},0)$; $(-\sqrt{3},0)$

* Puntos de corte eje Y:

$x=0 \Rightarrow f(x)=1$: $(0,1)$

c)



b) Asíntota horizontal:

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-6}{x^2-x-6}=2 \Rightarrow y=2$ (A.H.)

Asíntotas verticales:

$\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{2x^2-6}{x^2-x-6}=\left[\frac{2}{0}=\infty\right]=\begin{cases}+\infty & \text{si } x\to-2^-\\ -\infty & \text{si } x\to-2^+\end{cases} \Rightarrow x=-2$ (A.V.)

$\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{2x^2-6}{x^2-x-6}=\left[\frac{12}{0}=\infty\right]=\begin{cases}-\infty & \text{si } x\to3^-\\ +\infty & \text{si } x\to3^+\end{cases} \Rightarrow x=3$ (A.V.)

② a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x+2+x^2}+x^2\right)=(+\infty)+(+\infty)=+\infty$

b) $\displaystyle\lim_{x\to3^+}\frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{4x-12}=\left[\text{INDET } \frac{0}{0}\right]$ (para poder aplicar Ruffini y posteriormente simplificar introducimos $4x-12$ dentro del radical)

$\displaystyle=\lim_{x\to3^+}\sqrt{\frac{x^2-2x-3}{(4x-12)^2}}=\lim_{x\to3^+}\sqrt{\frac{(x-3)(x+1)}{(4(x-3))^2}}=\lim_{x\to3^+}\sqrt{\frac{(x-3)(x+1)}{16(x-3)^2}}=$

$\displaystyle=\lim_{x\to3^+}\sqrt{\frac{x+1}{16(x-3)}}=\sqrt{\frac{4}{16\cdot0}}=+\infty$ (ya que $x\to3^+$)

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{x^2-9}}\cdot(x-3)\right)=\left[\sqrt{\frac{2}{\infty}}\cdot\infty=0\cdot\infty : \text{INDET}\right]=$

(para poder operar introducimos $x-3$ dentro del radical)

$\displaystyle=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2(x-3)^2}{x^2-9}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2x^2-12x+18}{x^2-9}}=\sqrt{\frac{2}{1}}=\sqrt{2}$

(indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ cuando $x\to\infty$: se dividen los coeficientes líderes)

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x^2-2x-7}\right)^{\frac{x^2}{x-1}} \underset{(*)}{=} e^L \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x^2-2x-7}-1\right)\frac{x^2}{x-1}=L$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x^2-2x-7}-1\right)\frac{x^2}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x-1-x^2+2x+7}{x^2-2x-7}\cdot\frac{x^2}{x-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+6}{x^2-2x-7}\cdot\frac{x^2}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3+6x^2}{x^3-3x^2-5x+7}=\underline{\underline{4}}\Rightarrow\overset{(*)}{=}e^4$$

③ a) $\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{2x^2+4}{kx-1}=\frac{6}{-k-1}$

$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}(-2x+2)=4$ $\Bigg\}\Rightarrow$ para que

exista el límite cuando $x\to-1$, los límites laterales deben ser iguales: $\frac{6}{-k-1}=4\Rightarrow 6=-4k-4\Rightarrow$

$\Rightarrow 4k=-10\Rightarrow k=-\frac{10}{4}\Rightarrow \underline{\underline{k=-\frac{5}{2}}}$. En este caso

$\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)=4$ y f es continua en $x=-1$.

b) $\lim_{x\to4^-}f(x)=\lim_{x\to4^-}(-2x+2)=-6$

$\lim_{x\to4^+}f(x)=\lim_{x\to4^+}\frac{-x^2+2x+8}{x-4}=\left[\text{INDET}:\frac{0}{0}\right]=$

$=\lim_{x\to4^+}\frac{(x-4)(-x-2)}{x-4}=\lim_{x\to4^+}(-x-2)=-6$ $\Bigg\}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ existe $\lim_{x\to4}f(x)=-6$. Pero no existe $f(4)$ pues $\frac{-x^2+2x+8}{x-4}$ no está definida para $x=4\Rightarrow f$ NO ES CONTINUA en $x=4$: DISCONTINUIDAD EVITABLE.

④ $f(x)=x^3-7x^2+7x+15$ f es continua en todo $\mathbb{R}$

$f(-2)=-35$
$f(0)=15$
$f(4)=-5$ $\Bigg\}\Rightarrow \exists\, c_1\in(-2,0)\ /\ f(c_1)=0$ y $\exists\, c_2\in(0,4)\ /\ f(c_2)=0$.

De hecho las soluciones son $\underline{\underline{x_1=-1}}$, $\underline{\underline{x_2=3}}$ y $\underline{\underline{x_3=5}}$