

Examen de Matemáticas II – 2º de Bachillerato

1. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2}$, contesta a los siguientes apartados:

- a) Halla su dominio y los puntos de corte con los ejes. **(1 punto)**
- b) Halla las asíntotas verticales y horizontales. **(1 punto)**
- c) Haz una representación gráfica aproximada de la función utilizando los apartados anteriores (sin necesidad de tabla de valores). **(1 punto)**

2. Calcula los siguientes límites. **(4 puntos; 1 punto por apartado)**

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^4 + x^2} - x^2)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{3x}{x^2}\right)^{\frac{x^2+1}{2x^2}}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x-2}{5} \cdot \sqrt{\frac{3}{x^2-4}}\right)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{3x^2-7}\right)^{6x}$

3. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-1} & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } x = -1 \\ x^2 + 2x & \text{si } -1 < x < 2 \\ ax - x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

- a) Estudia la continuidad de f en $x = -1$. Caso de no ser continua di qué tipo de discontinuidad es, razonando la respuesta. **(1 punto)**
- b) Halla razonadamente el valor de a para que f sea continua en $x = 2$. **(1 punto)**

4. Utiliza el Teorema de Bolzano para hallar un intervalo de longitud a lo sumo 1 unidad, en el que la ecuación $2x^3 - 2x + 1 = 0$ tenga una solución. **(1 punto)**

$$① f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} \quad c)$$

$$a) x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ó } x = 2$$

$$\Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$$

* Puntos de corte eje X:

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ ó } x = -3 : \quad \cancel{(2, 0)}; \underline{\underline{(-3, 0)}}$$

* Puntos de corte eje Y:

$$x = 0 \Rightarrow f(x) = 3 : \quad \underline{\underline{(0, 3)}}$$

b) * Asintota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{y = 1}} \text{ (A.H.)}$$

* Asintotas verticales:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+3}{x+1} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow -1^- \\ 0 & \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow -1^+ \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{x = -1}} \text{ (A.V.)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = \left[\frac{0}{0} \text{ INDET} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+1} = \frac{5}{3}$$

$\Rightarrow x = 2$ NO ES ASÍNTOTA VERTICAL.

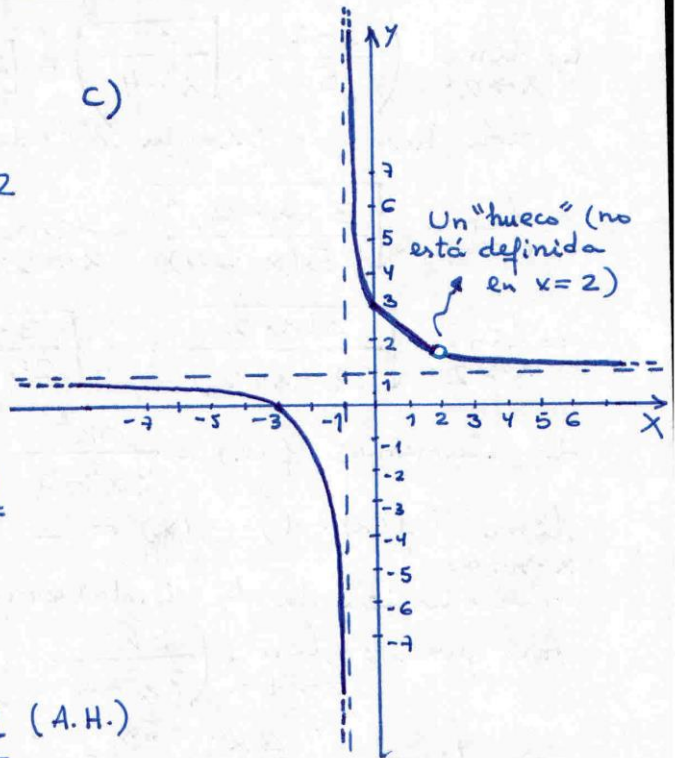
$$② a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^4 + x^2} - x^2) = [\text{INDET } \infty - \infty] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^4 + x^2} - x^2)(\sqrt{x^4 + x^2} + x^2)}{\sqrt{x^4 + x^2} + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + x^2 - x^4}{\sqrt{x^4 + x^2} + x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + x^2} + x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \text{ INDET} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{\sqrt{x^4 + x^2}}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{3x}{x^2} \right)^{\frac{x^2+1}{2x^2}} = (2 + 0)^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$



$$\begin{aligned}
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x-2}{5} \cdot \sqrt{\frac{3}{x^2-4}} \right) &= [\text{INDET: } 0 \cdot \infty] = (\text{para hacer la operación hay que introducir todo dentro del radical}) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{3(x-2)^2}{25(x^2-4)}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{3(x-2)^2}{25(x+2)(x-2)}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{3(x-2)}{25(x+2)}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 0}{25 \cdot 4}} = \underline{\underline{0}}
 \end{aligned}$$

d) Llamemos $f(x) = \frac{3x^2}{3x^2-7}$ y $g(x) = 6x$. Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)-1) \cdot g(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)^{g(x)} = e^L$$

(resolución de la indeterminación del tipo 1^∞)

Así pues: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{3x^2-7} - 1 \right) \cdot 6x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{42x}{3x^2-7} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{3x^2-7} \right)^{6x} = e^0 = \underline{\underline{1}}$$

③ a) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{-1-1} = -1$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2+2x) = (-1)^2+2(-1) = -1$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1 \neq 2 = f(-1)$: existe el límite cuando $x \rightarrow -1$, pero no es igual que la imagen de f en $x = -1 \Rightarrow f$ NO ES CONTINUA en $x = -1$; DISCONTINUIDAD EVITABLE.

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2+2x) = 8$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} (ax-x^2) = 2a-4$

\Rightarrow para que exista el límite cuando $x \rightarrow 2$, los laterales deben ser iguales:

$8 = 2a - 4 \Rightarrow 2a = 12 \Rightarrow \underline{\underline{a = 6}}$. En este caso $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 8$ y f es continua en $x = 2$

④ La función $f(x) = 2x^3 - 2x + 1$ es continua en todo \mathbb{R} , en particular en todo intervalos cerrado y acotado. Encontramos uno $[a, b]$ de longitud 1 en el que $\text{signo } f(a) \neq \text{signo } f(b)$:

$f(0) = 1$; $f(1) = 1$; $f(2) = 15$; $\underline{f(-1) = 1}$; $\underline{f(-2) = -11}$

Así pues, puede servir como solución el intervalo $(-2, -1)$