Propiedades de las funciones derivables. Representación gráfica de funciones

1. Determinar las asíntotas de $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$. Estudiar la concavidad y convexidad. Determinar los puntos de inflexión.

(Junio 1997)

Solución:

Por un lado, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^2}=0 \Rightarrow$ y = 0 es una asíntota horizontal (el eje X).

Por otro, f no tiene asíntotas verticales pues no existe ningún número k de tal manera que $\lim\limits_{x\to k}\frac{1}{1+x^2}=\infty$ (el denominador nunca se anula: Dom(f) = ¡).

Tampoco tiene asíntotas oblicuas (del tipo y = mx + n) pues es mayor el grado del denominador y por tanto $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

Para estudiar la concavidad y la convexidad estudiemos la derivada segunda:

$$f'(x)=\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2\left(1+x^2\right)^2-(-2x)2\left(1+x^2\right)2x}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{\left(1+x^2\right)\left[-2\left(1+x^2\right)+8x^2\right]}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}$$

Observemos ahora que:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2-2=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{1}{3}}=\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{-\sqrt{3}}{3}\end{cases}$$

Estudiemos ahora el signo de la segunda derivada:

$\left(-\infty,\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\frac{-\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$
$f''(x)>0$	$f''(x)<0$	$f''(x)>0$
cóncava	convexa	cóncava

Por tanto f es cóncava en $\left(-\infty,\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)\mathrm{U}\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ y convexa en $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Además en el punto $x=\frac{-\sqrt{3}}{3}$ hay un punto de inflexión porque en éste la función pasa de ser cóncava a convexa.

Análogamente en $x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ hay otro punto de inflexión porque aquí pasa de ser convexa a cóncava.

Como $f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$ y, de igual modo, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3}{4}$, los puntos de inflexión son $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$†

2. Se considera la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$; obtener sus asíntotas. Estudiar el crecimiento y decrecimiento. Calcular los máximos y mínimos relativos.

(Septiembre 1997)

Solución:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty = \begin{cases} +\infty \text{ si } x \to +\infty \\ -\infty \text{ si } x \to -\infty \end{cases} \Rightarrow \text{f no tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x-1} = \infty = \begin{cases} -\infty \text{ si } x \to 1^- \\ +\infty \text{ si } x \to 1^+ \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

Hallemos ahora la asíntota oblicua y = mx + n:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1 \quad ;$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - \left(x^2 - x\right)}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

Por tanto y = x + 1 es una asíntota oblicua.

Estudiemos el crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Entonces $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ó $x = 2$. Estudiemos el signo de la primera derivada (tengamos en cuenta que en x = 1 hay una asíntota vertical):

$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
creciente	decreciente	decreciente	creciente

Por tanto f es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$.

Además:

- En el punto x = 0 hay un máximo pues f pasa aquí de creciente a decreciente. Como $f(0) = 0 \Rightarrow$ el punto (0, 0) es un máximo.

- En el punto x = 2 hay un mínimo pues aquí f pasa de ser decreciente a creciente. Como f(2) = 4 ⇒ (2, 4) es un mínimo. †

3. Determinar las asíntotas de $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ y estudiar el crecimiento de la función.

(Junio 1998)

Solución:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2-4}=\infty=\begin{cases}+\infty \text{ si } x\to+\infty\\ -\infty \text{ si } x\to-\infty\end{cases}\Rightarrow \text{f no tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3}{x^2-4}=\infty=\begin{cases}-\infty \text{ si } x\to-2^-\\ +\infty \text{ si } x\to-2^+\end{cases}\Rightarrow x=-2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3}{x^2-4}=\infty=\begin{cases}-\infty \text{ si } x\to2^-\\ +\infty \text{ si } x\to2^+\end{cases}\Rightarrow x=2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

Hallemos ahora la asíntota oblicua y = mx + n:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-4x}=1\qquad ;$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-\left(x^3-4x\right)}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2-4}=0$$

Por tanto y = x es una asíntota oblicua (la bisectriz de los cuadrantes primero y tercero).

Estudiemos el crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x)=\frac{3x^2\left(x^2-4\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{x^4-12x^2}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{x^2\left(x^2-12\right)}{\left(x^2-4\right)^2}$$

Entonces $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2\left(x^2-12\right)=0 \Leftrightarrow x=0,\ x=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ ó $x=-\sqrt{12}=-2\sqrt{3}$.

Estudiemos el signo de la primera derivada (tengamos en cuenta que en x = −2 y x = 2 hay asíntotas verticales):

$\left(-\infty,-2\sqrt{3}\right)$	$\left(-2\sqrt{3},-2\right)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$\left(2, 2\sqrt{3}\right)$	$\left(2\sqrt{3},+\infty\right)$
$f'(x)>0$	$f'(x)<0$	$f'(x)<0$	$f'(x)<0$	$f'(x)<0$	$f'(x)>0$
creciente	decreciente	decreciente	decreciente	decreciente	creciente

Por tanto:

- f es creciente en $\left(-\infty,-2\sqrt{3}\right)\cup\left(2\sqrt{3},+\infty\right)$
- f es decreciente en $\left(-2\sqrt{3},-2\right)\cup(-2,0)\cup(0,2)\cup\left(2,2\sqrt{3}\right)$ †

4. Estudiar la concavidad y convexidad de $y = \dfrac{4}{x^2+3}$. Determinar si tiene puntos de inflexión.

(Septiembre 1998)

Solución:

Tengamos primero en cuenta que Dom(f) = ¡ pues el denominador nunca se anula.

$$f'(x) = \frac{-8x}{\left(x^2+3\right)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-8\left(x^2+3\right)^2 - \left[-8x\cdot 2\left(x^2+3\right)2x\right]}{\left(x^2+3\right)^4} = \frac{8\left(x^2+3\right)\left[-\left(x^2+3\right)+4x^2\right]}{\left(x^2+3\right)^4} =$$

$$= \frac{8\left(3x^2-3\right)}{\left(x^2+3\right)^3} = \frac{24\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+3\right)^3} = \frac{24\left(x+1\right)\left(x-1\right)}{\left(x^2+3\right)^3}$$

Claramente entonces $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ó $x = 1$. Estudiemos el signo de la segunda derivada:

$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$
cóncava	convexa	cóncava

Por tanto f es cóncava en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y convexa en $(-1, 1)$. Además:

ü En $x = -1$ la función pasa de ser cóncava a convexa, luego $x = -1$ es un punto de inflexión. Como $f(-1) = 1 \Rightarrow (-1, 1)$ es un punto de inflexión.

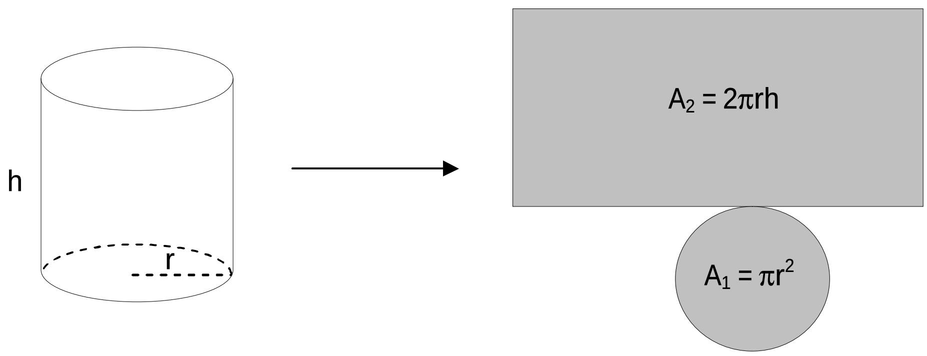
ü En $x = 1$ la función pasa de ser convexa a cóncava, luego $x = 1$ es un punto de inflexión. Como $f(1) = 1 \Rightarrow (1, 1)$ es un punto de inflexión. †

5. Se desea construir un depósito de latón con forma de cilindro de área total igual a 54 m^2. Determinar el radio de la base y la altura del cilindro para que el volumen sea máximo.

(Junio 1999)

Solución:

Consideremos el depósito abierto:



El área total es $A = A_1 + A_2 = \pi r^2 + 2\pi r h$ (ver figura). Entonces $\pi r^2 + 2\pi r h = 54 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\pi r h = 54 - \pi r^2 \Rightarrow h = \frac{54 - \pi r^2}{2\pi r} = \frac{27}{\pi r} - \frac{r}{2}$$

El volumen del cilindro es $V = \pi r^2 h = \pi r^2 \left(\frac{27}{\pi r} - \frac{r}{2} \right) = 27r - \frac{\pi r^3}{2}$

Entonces, derivando respecto de r: $V' = 27 - \frac{3\pi r^2}{2}$. Por tanto:

$$V' = 0 \Leftrightarrow 27 - \frac{3\pi r^2}{2} = 0 \Leftrightarrow 54 - 3\pi r^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 = \frac{18}{\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{18}{\pi}} \cong 2,39 \text{ m.}$$

Sustituyendo: $h = \frac{27}{\pi \cdot 2,39} - \frac{2,39}{2} \cong 2,39$ m. †

6. Hallar los máximos y mínimos relativos, los puntos de inflexión y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

(Septiembre 1999)

Solución:

Obsérvese en primer lugar que Dom(f) = ¡ − {−1, 1} (de hecho f tiene en x = −1 y en x = 1, sendas asíntotas verticales)

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

Entonces $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = \sqrt{3}$ ó $x = -\sqrt{3}$. Estudiemos el signo de la primera derivada (tengamos en cuenta que en x = −1 y x = 1 hay asíntotas verticales):

$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
creciente	decreciente	decreciente	decreciente	decreciente	creciente

Por tanto:

ü f es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

ü f es decreciente en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

Además:

ü En el punto $x = -\sqrt{3}$ hay un máximo pues f pasa aquí de creciente a decreciente. Como $f(-\sqrt{3}) = \frac{-3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ el punto $\left(-\sqrt{3}, \frac{-3\sqrt{3}}{2} \right)$ es un máximo.

En el punto $x=\sqrt{3}$ hay un mínimo pues aquí f pasa de ser decreciente a creciente. Como $f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ es un mínimo.

$$f''(x)=\frac{\left(4x^3-6x\right)\left(x^2-1\right)^2-\left(x^4-3x^2\right)2\left(x^2-1\right)2x}{\left(x^2-1\right)^4}=$$

$$=\frac{\left(x^2-1\right)\left[\left(4x^3-6x\right)\left(x^2-1\right)-4x\left(x^4-3x^2\right)\right]}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{2x^3+6x}{\left(x^2-1\right)^3}=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$$

Entonces $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Estudiemos el signo de la segunda derivada:

$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$
convexa	cóncava	convexa	cóncava

Por tanto f es convexa en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ y cóncava en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$. Además en $x = 0$ la función pasa de ser cóncava a ser convexa $\Rightarrow x = 0$ es un punto de inflexión. Como $f(0) = 0$ el punto de inflexión es el $(0, 0)$. †

7. El coste de producción de x unidades de un producto dado por la expresión $C=x^2-300x+1000$ ptas. y el precio de venta de una unidad es $U = 1000 - x$ ptas. ¿Cuántas unidades se deben vender para que el beneficio sea máximo?

(Junio 2000)

Solución:

El beneficio B es el precio de venta menos el coste. El precio de venta de x unidades será $U=x(1000-x)=1000x-x^2$. Entonces el beneficio que produce la venta de x unidades es: $B=U-C=\left(1000x-x^2\right)-\left(x^2-300x+1000\right)=-2x^2+1300x-1000$

Derivando: $B'=-4x+1300 \Rightarrow B' = 0 \Leftrightarrow -4x + 1300 = 0 \Leftrightarrow x = 325$, valor que es un máximo pues $B'' = -4, \forall x \in$ ¡ .

Por tanto para obtener beneficio máximo se han de vender 325 unidades. †

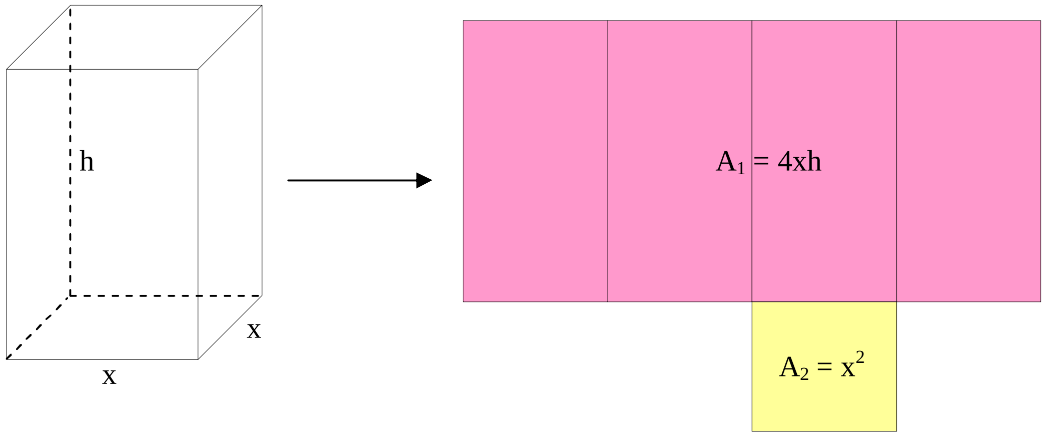
8. Halla las dimensiones de un depósito abierto superiormente, en forma de prisma recto de base cuadrada, de 1000 metros cúbicos de capacidad que tenga un revestimiento interior de coste mínimo. El precio del m^2 de revestimiento lateral es 100 euros, el precio del m^2 de revestimiento del fondo es 200 euros. Halla también el coste mínimo.

(Septiembre 2001)

Solución:

Llamemos x a la anchura y profundidad (el prisma es de base cuadrada) y h a la altura del prisma recto.

Su volumen viene dado por $V=x^2h$. Entonces $x^2h=1000 \Rightarrow h=\frac{1000}{x^2}$ **(*)**



La superficie lateral es $A_1 = 4xh$. Entonces el coste del revestimiento lateral será (a 100 euros el metro cuadrado): $C_1 = 400xh$

La superficie del fondo es $A_2 = x^2$. Por tanto el coste revestimiento del fondo es (a 200 euros el metro cuadrado): $C_2 = 200x^2$

El coste total del revestimiento será pues: $C = C_1 + C_2 = 400xh + 200x^2$. Sustituyendo el valor de h: $C = 400x\dfrac{1000}{x^2} + 200x^2 = \dfrac{400000}{x} + 200x^2$

Derivando: $C' = \dfrac{-400000}{x^2} + 400x$. Entonces:

$$C' = 0 \Leftrightarrow \frac{-400000}{x^2} + 400x = 0 \Leftrightarrow -400000 + 400x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1000 \Leftrightarrow x = 10$$

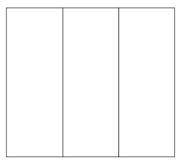
Sustituyendo en **(*)** h = 10.

Por tanto el prisma recto es un cubo de 10 metros de arista.

El coste mínimo del revestimiento será: $C = \dfrac{400000}{10} + 200 \cdot 10^2 = 60000$ euros.

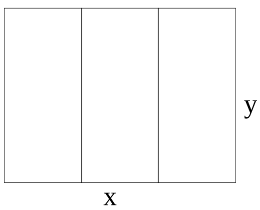
9. Un solar rectangular de 11.250 m^2 se divide en tres zonas rectangulares iguales (como muestra la figura) para venderlo. Se valla el borde del campo y la separación de las zonas. Calcula las dimensiones del solar para que la longitud de valla utilizada sea mínima.

(Junio 2002)



Solución:

Llamemos x e y a las dimensiones (anchura y altura) del borde del campo (ver figura).



Entonces $xy = 11250 \Rightarrow y = \dfrac{11250}{x}$ **(*)**

La longitud de la valla es claramente L = 2x + 4y.

Sustituyendo tenemos: $L = 2x + 4\frac{11250}{x} = 2x + \frac{45000}{x}$

Derivando: $L' = 2 - \frac{45000}{x^2}$.

Entonces $L' = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{45000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 45000 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 22500 \Leftrightarrow x = -150$ ó x = 150. El único valor que puede ser solución al problema es el positivo: x = 150 m.

Sustituyendo en **(*)** $y = \frac{11250}{150} = 75$ m

Por tanto las dimensiones del solar rectangular son x = 150 m. ; y = 75m. †

10. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3}$. Calcula: a) Los máximos y mínimos relativos. b) Las asíntotas. c) Los puntos de inflexión.

(Junio 2002)

Solución:

a) $f'(x) = \frac{2x \cdot x^3 - (x^2-1)3x^2}{x^6} = \frac{x^2\left[2x^2 - 3(x^2-1)\right]}{x^6} = \frac{-x^2+3}{x^4}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}\ ;\ x = -\sqrt{3}$

$f''(x) = \frac{-2x \cdot x^4 - (-x^2+3)4x^3}{x^8} = \frac{2x^3\left[-x^2 - 2(-x^2+3)\right]}{x^8} = \frac{2(x^2-6)}{x^5}$

$f''(\sqrt{3}) = \frac{2(3-6)}{\sqrt{3}^5} = \frac{-6}{9\sqrt{3}} = \frac{-2}{3\sqrt{3}} < 0 \Rightarrow x = \sqrt{3}$ es un máximo.

$f''(-\sqrt{3}) = \frac{2(3-6)}{(-\sqrt{3})^5} = \frac{-6}{-9\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} > 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3}$ es un mínimo.

Como $f(\sqrt{3}) = \frac{3-1}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ y $f(-\sqrt{3}) = \frac{3-1}{-3\sqrt{3}} = \frac{2}{-3\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$, el máximo y el mínimo son, respectivamente, los puntos $\left(\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right), \left(-\sqrt{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^3} = 0 \Rightarrow$ y = 0 es una asíntota horizontal (el eje X).

$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{x^3} = \infty = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \to 0^- \\ -\infty & \text{si } x \to 0^+ \end{cases} \Rightarrow$ x = 0 es una asíntota vertical (el eje Y).

No tiene asíntotas oblicuas (del tipo y = mx + n) pues es mayor el grado del denominador y por tanto $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

c) $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\left(x^2-6\right)}{x^5} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{6}\ ;\ x = -\sqrt{6}$

$$f'''(x) = \frac{4x\cdot x^5 - 2\left(x^2-6\right)5x^4}{x^{10}} = \frac{2x^4\left[2x^2 - 5\left(x^2-6\right)\right]}{x^{10}} = \frac{2\left(-3x^2+30\right)}{x^6} =$$

$$= \frac{-6\left(x^2-10\right)}{x^6}$$

$f'''\left(\sqrt{6}\right) = f'''\left(-\sqrt{6}\right) = \frac{-6(6-10)}{6^3} = \frac{-4}{36} = \frac{-1}{9} \neq 0 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{6}\ ;\ x = -\sqrt{6}$ son puntos de inflexión.

Como $f\left(\sqrt{6}\right) = \frac{6-1}{6\sqrt{6}} = \frac{5}{6\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{36}$ y $f\left(-\sqrt{6}\right) = \frac{6-1}{-6\sqrt{6}} = \frac{5}{-6\sqrt{6}} = -\frac{5\sqrt{6}}{36}$, los puntos de inflexión son: $\left(\sqrt{6}, \frac{5\sqrt{6}}{36}\right)$ y $\left(-\sqrt{6}, -\frac{5\sqrt{6}}{36}\right)$ †

11. La capacidad de concentración de una saltadora de altura en una reunión atlética de tres horas de duración viene dada por la función f(t) = 300t(3 − t) donde t mide el tiempo en horas.
 a) Calcula los intervalos en los cuales la capacidad de concentración aumenta y los intervalos en los que disminuye. ¿Cuándo es nula?
 b) ¿Cuál es el mejor momento, en términos de su capacidad de concentración, para que la saltadora pueda batir su propia marca?
 c) Representa gráficamente la función capacidad de concentración.

(Septiembre 2002)

Solución:

a) $f'(t) = 300(3-t) + 300t(-1) = -600t + 900$

$$f'(t) > 0 \Leftrightarrow -600t + 900 > 0 \Leftrightarrow 600t < 900 \Leftrightarrow t < \frac{900}{600} = \frac{3}{2}$$

$$f'(t) < 0 \Leftrightarrow -600t + 900 < 0 \Leftrightarrow 600t > 900 \Leftrightarrow t > \frac{900}{600} = \frac{3}{2}$$

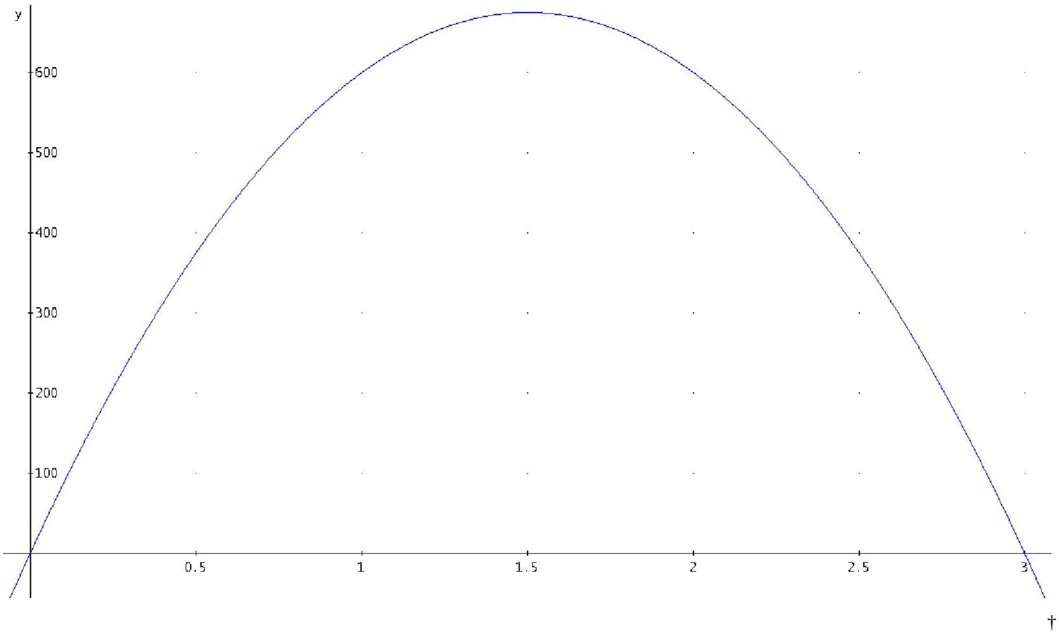
De lo anterior se deduce que f es creciente en $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ y decreciente en $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$. Es decir, la capacidad de concentración aumenta en la primera hora y media y disminuye a partir de ese momento.

$f(t) = 0 \Leftrightarrow 300t(3-t) = 0 \;\Leftrightarrow$ t = 0 ó t = 3. Esto quiere decir que la capacidad de concentración es nula si t = 0 (antes de empezar la prueba) o t = 3 (a las tres horas de haber dado comienzo la prueba).

b) $f'(t) = 0 \Leftrightarrow -600t + 900 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{900}{600} = \dfrac{3}{2}$

$f''(t) = -600 < 0,\ \forall\, t \in \mathbb{R} \Rightarrow t = \dfrac{3}{2}$ es un máximo, lo que quiere decir que el mejor momento, en términos de capacidad de concentración, para que la saltadora pueda batir su propia marca es justamente a la hora y media de iniciada la prueba.

c)

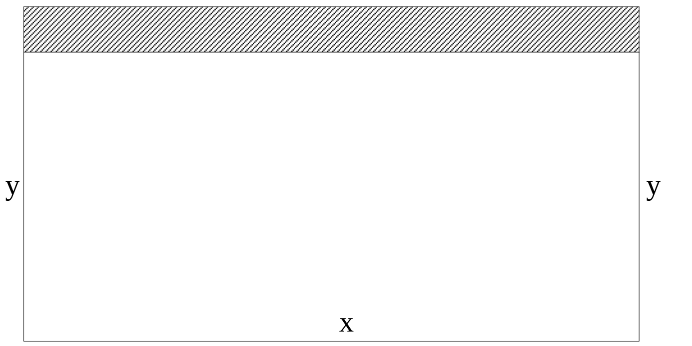


12. El alcalde de un pueblo quiere preparar un recinto rectangular para celebrar fiestas. Aprovecha para uno de los lados una tapia existente y dispone de 300 m de tela metálica para cercar los otros tres lados.
 a) Halla las dimensiones del recinto máximo que se puede acotar.
 b) Calcula el área de dicho recinto.

(Septiembre 2002)

Solución:

a) Llamemos x a la anchura del recinto e y a su profundidad (ver figura).



Entonces $x + 2y = 300 \Rightarrow x = 300 - 2y$ **(*)**

El recinto que se puede acotar será máximo, cuando el área sea máxima, es decir, cuando la expresión $A = xy$ sea máxima. Sustituyendo: $A = (300 - 2y)y$.

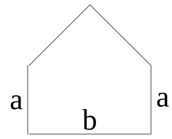
Derivando: $A' = -2y + (300 - 2y) = -4y + 300$. Entonces $A' = 0 \Leftrightarrow -4y + 300 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = 75$. Sustituyendo en **(*)**, $x = 150$

Por tanto las dimensiones del recinto máximo que se puede acotar son: $x = 150$ metros e $y = 75$ metros.

b) $A = xy = 150 \cdot 75 = 11250\ m^2$. †

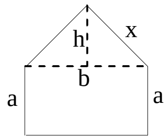
13. El perímetro de la ventana del dibujo mide 6 metros. Los dos lados superiores forman entre sí un ángulo de 90º. Calcula la longitud de los lados a y b para que el área de la ventana sea máxima.

(Junio 2003)



Solución:

Como los dos lados superiores forman un triángulo rectángulo se tiene, por el teorema de



Pitágoras, que $x^2 + x^2 = b^2 \Rightarrow 2x^2 = b^2 \Rightarrow b = \sqrt{2}x$ (ver figura).

Además, en cada uno de los dos triángulos simétricos que dividen al mencionado, $x^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = x^2 - \frac{b^2}{4} = x^2 - \frac{2x^2}{4} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow h = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}x}{2}$.

Como el perímetro de la ventana es 6 m, $2a + b + 2x = 6 \Rightarrow 2a + \sqrt{2}x + 2x = 6 \Rightarrow \Rightarrow$ $2a = 6 - 2x - \sqrt{2}x \Rightarrow a = 3 - x - \frac{\sqrt{2}}{2}x$.

El área de la ventana es $A = ab + \frac{bh}{2}$. Por tanto:

$$A = \left(3 - x - \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}x\,\frac{\sqrt{2}x}{2}}{2} = 3\sqrt{2}x - \sqrt{2}x^2 - x^2 + \frac{x^2}{2} = 3\sqrt{2}x - \sqrt{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2$$

La derivada es $A' = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}x - x$. Igualándola a cero se obtienen los extremos:

$A' = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}x - x = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}x + x \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} = \frac{12 - 3\sqrt{2}}{7}$ (que es un máximo pues la segunda derivada es $A'' = -2\sqrt{2} - 1 < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$).

Por tanto las longitudes de los lados a y b para que el área de la ventana sea máxima son:

$$a = 3 - x - \frac{\sqrt{2}}{2}x = 3 - \frac{12 - 3\sqrt{2}}{7} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{12 - 3\sqrt{2}}{7} = 3 - \frac{12 - 3\sqrt{2}}{7} - \frac{12\sqrt{2} - 6}{14} =$$

$$= \frac{42 - 24 + 6\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 6}{14} = \frac{24 - 6\sqrt{2}}{14} \cong 1{,}11 \text{ metros.}$$

$$b=\sqrt{2}\,\frac{12-3\sqrt{2}}{7}=\frac{12\sqrt{2}-6}{7}\cong 1{,}57 \text{ metros.}$$ †

14. Determina las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal (recta perpendicular a la tangente) en el punto de abscisa 0, a la gráfica de la función f dada por $f(x)=2xe^x+\dfrac{x^3-2}{x^2+4}$.

(Junio 2003)

Solución:

$$f'(x)=2e^x+2xe^x+\frac{3x^2\left(x^2+4\right)-\left(x^3-2\right)2x}{\left(x^2+4\right)^2}=2e^x+2xe^x+\frac{x^4+12x^2+4x}{\left(x^2+4\right)^2}$$

En el punto x = 0 la recta tangente es y − f(0) = f '(0)(x − 0)

$$f(0)=2\cdot 0\cdot e^0+\frac{0^3-2}{0^2+4}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

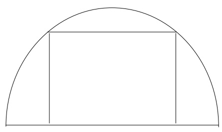
$$f'(0)=2e^0+2\cdot 0\cdot e^0+\frac{0^4+12\cdot 0^2+4\cdot 0}{\left(0^2+4\right)^2}=2$$

Por tanto la recta tangente queda: $y-\dfrac{-1}{2}=2x \Leftrightarrow y=2x-\dfrac{1}{2}$

La pendiente de esta recta es m = 2. La pendiente de la recta normal es $m'=\dfrac{-1}{m}$. Entonces $m'=\dfrac{-1}{2}$, con lo que la recta normal será $y=\dfrac{-1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ †

15. En un semicírculo de radio 10 m se quiere inscribir un rectángulo, uno de cuyos lados esté sobre el diámetro y el opuesto a él tenga sus extremos en la parte curva. Calcula las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima.

(Septiembre 2003)

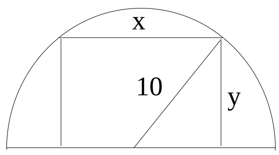


Solución:

Llamemos x a la base del rectángulo e y a la altura. Entonces, aplicando el teorema de Pitágoras se tiene (ver figura):

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2=10^2\Rightarrow\frac{x^2}{4}+y^2=100\Rightarrow x^2+4y^2=400\Rightarrow x^2=400-4y^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{400-4y^2}\quad \textbf{(*)}$$



El área del rectángulo es:

$$A=xy=\sqrt{400-4y^2}\cdot y=\sqrt{400y^2-4y^4}$$

Derivando: $A'=\dfrac{800y-16y^3}{2\sqrt{400y^2-4y^4}}=\dfrac{800y-16y^3}{4\sqrt{100y^2-y^4}}=\dfrac{200y-4y^3}{\sqrt{100y^2-y^4}}$

Luego: $A'=0 \Leftrightarrow 200y-4y^3=0 \Leftrightarrow 4y\left(50-y^2\right)=0 \Leftrightarrow y=0,\ y=\sqrt{50}$ ó $y=-\sqrt{50}$

La única solución factible es $y=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$. Sustituyendo en **(*)** $x=\sqrt{400-4\sqrt{50}^2}=$

$\sqrt{400-200}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}$

Por tanto las dimensiones del rectángulo para que su área se máxima son:

$y=5\sqrt{2}\cong 7{,}07\,\text{m.}\quad x=10\sqrt{2}=14{,}14\,\text{m.}$ †

16. Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3-6x^2+5x$:
   a) Halla las coordenadas del punto de inflexión.
   b) Halla las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas.
   c) Determina las ecuaciones de las rectas tangentes a f(x) en el punto de inflexión y en el origen de coordenadas.

(Septiembre 2003)

Solución:

17. Dada la curva $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ se pide:
   a) Dominio de definición de la función y puntos de corte con los ejes, si los hay.
   b) Asíntotas, si las hay.
   c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
   d) Máximos y mínimos, si los hay.
   e) Una representación aproximada de la misma.

(Junio 2004)

Solución:

18. Un alambre de 100 metros de largo se divide en dos trozos. Con uno de los trozos se forma un cuadrado y con el otro una circunferencia. Halla la longitud de los trozos para que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo sea mínima.

(Junio 2004)

Solución:

Llamemos x a la longitud de una de las partes e y a la longitud de la otra $\Rightarrow x+y=100 \Rightarrow$ $\Rightarrow y=100-x$.

Con x hacemos 4 partes iguales y formamos un cuadrado de área $A_1=\left(\dfrac{x}{4}\right)^2=\dfrac{x^2}{16}$.

La longitud de la circunferencia formada con la otra de las partes es:

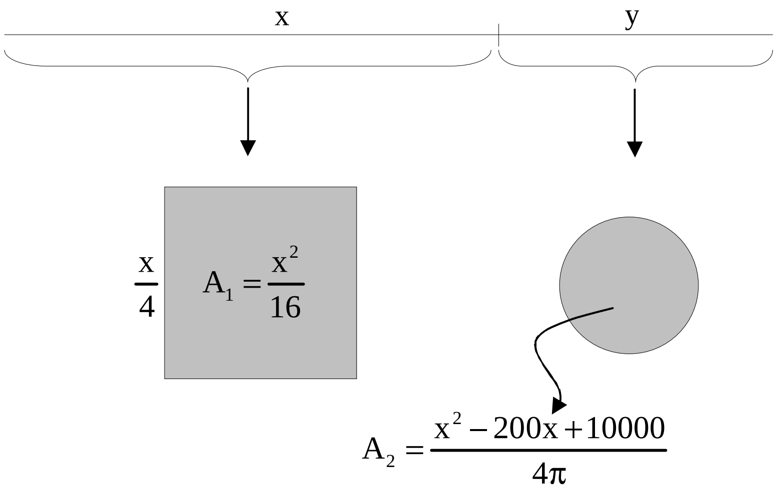
$$2\pi r=y \Leftrightarrow 2\pi r=100-x \Leftrightarrow r=\frac{100-x}{2\pi}$$

Entonces el círculo correspondiente a esta parte tendrá área:

$$A_2 = \pi r^2 = \pi \left(\frac{100 - x}{2\pi} \right)^2 = \frac{x^2 - 200x + 10000}{4\pi}$$

La suma de las áreas del cuadrado y del círculo será

$$A = A_1 + A_2 = \frac{x^2}{16} + \frac{x^2 - 200x + 10000}{4\pi} = \frac{\pi x^2 + 4x^2 - 800x + 40000}{16\pi}$$



Derivando:

$$A' = \frac{1}{16\pi}(2\pi x + 8x - 800) = \frac{1}{8\pi}(\pi x + 4x - 400).$$

$$A' = 0 \Leftrightarrow \pi x + 4x - 400 = 0 \Leftrightarrow x(\pi + 4) = 400 \Leftrightarrow x = \frac{400}{\pi + 4} \cong 56 \Rightarrow y \cong 100 - 56 = 44$$

Por tanto las longitudes de los trozos son, aproximadamente, x = 56 m e y = 44m. †

19. Considera la función $f(x) = -x^4 + 4x^3$. Calcula:
   a) Puntos de corte con los ejes.
   b) Máximos y mínimos.
   c) Puntos de inflexión.
   d) Halla el área de la región encerrada por la gráfica y el eje X.

(Septiembre 2004)

Solución:

20. Expresa el número 60 como suma de tres números positivos de forma que el segundo sea doble que el primero. Si el producto de los tres es máximo, determina el valor de dicho producto.

(Septiembre 2004)

Solución:

21. Una imprenta recibe el encargo de diseñar un cartel con las siguientes características: la zona impresa debe ocupar 100 cm^2, el margen superior debe medir 3 cm, el inferior 2 cm, y los márgenes laterales 4 cm cada uno. Calcula las dimensiones que debe tener el cartel de modo que se utilice la menor cantidad de papel posible.

(Junio 2005)

Solución:

22. De todos los prismas rectos de base cuadrada y tales que el perímetro de una cara lateral es de 30 cm, halla las dimensiones del que tiene volumen máximo.

(Septiembre 2005)

Solución:

23. Estudia el crecimiento y la concavidad de la función f: $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{Lx}{x}$. (L = logaritmo neperiano)

(Septiembre 2005)

Solución:

24. Halla los valores de los coeficientes b, c y d para que la gráfica de la función $y = x^3 + bx^2cx + d$ corte al eje OY en el punto (0, −1), pase por el punto (2, 3) y, en ese punto, tenga tangente paralela al eje OX.

(Septiembre 2005)

Solución:

25. Determina los valores de a, b y $c \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por el origen de coordenadas, tenga un punto de inflexión en x = −1 y su recta tangente en x = 1 tenga pendiente 3.

(Junio 2006)

Solución:

26. Enuncia el teorema de Rolle. En los ejemplos siguientes f(−2) = f(2) pero no hay ningún punto $c \in (-2, 2)$ tal que f '(c) = 0. Justifica en cada caso por qué no contradicen el teorema de Rolle. a) $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$, b) $g(x) = 2 - |x|$. (Nota: $|x|$ representa el valor absoluto de x)

(Junio 2006)

Solución:

27. Para la función $f(x)=(x+2)\cdot e^x$, se pide: a) Estudia su dominio y continuidad. b) Determina sus puntos de corte con los ejes. c) Obtén las coordenadas de los máximos y mínimos. (Recuerda que: $e^x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$)

(Septiembre 2006)

Solución:

28. Dada la función $f(x)=9x+6x^2-x^4$, se pide: a) Halla los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de f(x) tiene pendiente 1. b) Calcula los puntos de inflexión de f(x).

(Junio 2007)

Solución:

- $f'(x)=9+12x-4x^3$. Como la pendiente de la recta tangente en un punto coincide con la derivada en dicho punto, entonces hemos de hallar los puntos que cumplan $f'(x) = 1 \Leftrightarrow 9+12x-4x^3=1 \Leftrightarrow 4x^3-12x-8=0 \Leftrightarrow x^3-3x-2=0 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow (x-2)(x+1)^2=0 \Leftrightarrow x = 2$ ó $x = -1$. En coordenadas los puntos son: (2, 26) y (−1, −4)

- $f''(x)=12-12x^2$. Entonces $12-12x^2=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=-1$ ó $x = 1$. Estos son los posibles puntos de inflexión de la función. La derivada tercera es $f'''(x) = -24x$.

  $f'''(-1) = 24 \neq 0 \Rightarrow x = -1$ es un punto de inflexión. En coordenadas el punto (−1, −4)

  $f'''(1) = -24 \neq 0 \Rightarrow x = 1$ es un punto de inflexión. En coordenadas el punto (1, 14) †

29. En agosto de 1548 el matemático Ludovico Ferrari le propuso a su colega Niccolo Fontana, apodado Tartaglia, el siguiente problema: "Halla dos números reales no negativos cuya suma sea 8 de manera que su producto multiplicado por su diferencia sea máximo". Obtén las soluciones de este problema con dos decimales de aproximación.

(Septiembre 2007)

Solución:

Sean los números x e y con $0 < x < y$. Entonces $x + y = 8 \Rightarrow y = 8 - x$.

La cantidad que se quiere hacer máxima es $C=xy(y-x)$. Sustituyendo el valor de y se tiene: $C=x(8-x)\left((8-x)-x\right)=\left(8x-x^2\right)(8-2x)=2x^3-24x^2+64x$

Derivando C:

$$C'=6x^2-48x+64 \Rightarrow C'=0 \Leftrightarrow 6x^2-48x+64=0 \Leftrightarrow 3x^2-24x+32=0$$

Entonces $x=\dfrac{24\pm\sqrt{(-24)^2-4\cdot 3\cdot 32}}{6}=\dfrac{24\pm\sqrt{192}}{6}=\dfrac{-24\pm 8\sqrt{3}}{6}=-4\pm\dfrac{4\sqrt{3}}{3}=$

$$=\begin{cases}1,69\\-6,31\end{cases}$$

Por tanto x = 1,16 (los números son no negativos). Entonces y = 8 − 1,69 = 6,31. †

30. De la función $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{a-x}$, con a, b ∈ ¡ , sabemos que pasa por el punto (1, 2), y que tiene una asíntota oblicua cuya pendiente es −6. a) Determina los valores a y b de la función. b) Determina, si existen, las asíntotas verticales de dicha función.

(Septiembre 2007)

Solución:

31. Definición de punto de inflexión de una función. Calcula el valor de los parámetros a, b ∈ ¡ para que la función $f(x)=\left(x^2-a\right)e^x+bx$ tenga un punto de inflexión en x = 0 y un mínimo relativo en x = 1.

(Junio 2008)

Solución:

32. Dadas las funciones $f(x)=\ln\left(1-x^2\right)$ y $g(x)=\ln\left(1+x^2\right)$, se pide:

a) Determina el dominio de cada una de ellas.

b) Estudia si dichas funciones tienen puntos de inflexión.

(Septiembre 2008)

Solución:

33. Determina los valores de los parámetros a, b ∈ ¡ para que la función $f(x)=\left(ax^2+bx\right)e^{-x}$ tenga un extremo relativo en el punto de abscisa x = 3 y además pase por el punto (1, −1/e). Halla la ecuación de la recta tangente a f(x) en el punto de abscisa x = 0.

(Septiembre 2008)

Solución: