

Matrices

1. Calcular la matriz X, tal que $XB + A = C$; siendo

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

(Junio 1997)

Solución:

$$\begin{aligned} X \cdot B + A = C &\Rightarrow X \cdot B = C - A \Rightarrow X \cdot B \cdot B^{-1} = (C - A) \cdot B^{-1} \Rightarrow X \cdot I = (C - A) \cdot B^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow X = (C - A) \cdot B^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{Por un lado: } C - A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ -7 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Por otro, el determinante de la matriz B es (regla de Sarrus):

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (0+0+0) - (0+12+0) = -12. \text{ Como } B \neq 0, \text{ existe } B^{-1}, \text{ que la}$$

calcularemos mediante la fórmula: $B^{-1} = \frac{1}{|B|} (B^d)^t$, donde B^d es la matriz adjunta de

B. Esta última es $B^d = (B_{ij})$, en la que B_{ij} son los adjuntos de la matriz

$$B: B_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij} = \begin{cases} \Delta_{ij} & \text{si } i+j \text{ es par} \\ -\Delta_{ij} & \text{si } i+j \text{ es impar} \end{cases}, \text{ donde } \Delta_{ij} \text{ es el menor complementario}$$

de orden 2 correspondiente a la fila i y a la columna j (determinante de orden 2 que resulta de eliminar la fila i y la columna j):

$$B_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 - (-3) = 3, B_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(4-0) = -4, B_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6-0 = -6$$

$$B_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -(6-0) = -6, B_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0-0 = 0, B_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -(0-0) = 0$$

$$B_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3-0 = 3, B_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(0-0) = 0, B_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0-6 = -6$$

$$\text{Por tanto } B^d = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -6 \\ -6 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \text{ y } (B^d)^t = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \text{ y la matriz inversa de B}$$

es:

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} (B^d)^t = \frac{1}{-12} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{12} & \frac{6}{12} & -\frac{3}{12} \\ \frac{4}{12} & 0 & 0 \\ \frac{6}{12} & 0 & \frac{6}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Así pues } X = (C - A) \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ -7 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{29}{12} & -\frac{3}{2} & \frac{11}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{7}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \dagger$$

2. Encontrar la matriz X, Sabiendo que $B(A - I) = A X A$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Septiembre 1997)

Solución:

$$B \cdot (A - I) = A \cdot X \cdot A \Rightarrow A^{-1} \cdot B \cdot (A - I) \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot A \cdot A^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \cdot (A - I) \cdot A^{-1}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3+4+0) - (-2+8+0) = 7-6=1 \Rightarrow A \text{ tiene inversa y es}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A^d)^t.$$

Procediendo como en el ejercicio anterior, la matriz adjunta de A, A^d , es:

$$A^d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A^d)^t = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por tanto } X = A^{-1} \cdot B \cdot (A - I) \cdot A^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -4 & 7 \\ -3 & -9 & 16 \\ 2 & 7 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 2 & 5 \\ 62 & 6 & 12 \\ -50 & -4 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 22 & 46 & 73 \\ 50 & 106 & 168 \\ -40 & -84 & -133 \end{pmatrix} \dagger$$

3. Resolver la ecuación matricial $A^2 \cdot X - B = A^2$ y determinar la matriz X, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Junio 1998)

Solución:

$$A^2 \cdot X - B = A^2 \Rightarrow A^2 \cdot X = A^2 + B \Rightarrow X = (A^2)^{-1} \cdot (A^2 + B)$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad |A^2| = 4 \quad (A^2 \text{ es diagonal y el}$$

determinante de una matriz diagonal es el producto de los elementos de la diagonal principal). Por tanto A^2 tiene inversa, que es $(A^2)^{-1} = \frac{1}{|A^2|} \left((A^2)^d \right)^t$. La matriz

adjunta de A^2 es (procediendo de manera similar a cómo se hizo en el ejercicio 1):

$$(A^2)^d = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Por tanto: } (A^2)^{-1} = \frac{1}{|A^2|} \left((A^2)^d \right)^t = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Entonces: } X = (A^2)^{-1} \cdot (A^2 + B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dagger$$

4. Estudiar el rango de A, según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & -a & a \\ 1 & a+1 & 0 & 2a \\ a & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Razonar si para algún valor de a existe A^{-1} .

(Junio 1998)

Solución:

El rango de esta matriz es a lo sumo 3. Utilizaremos la propiedad que dice que el rango de una matriz es el máximo orden de sus menores no nulos.

Los menores de orden 3 de la matriz A son:

$$A_1 = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & -a \\ 1 & a+1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = ((a+1)^2 + 0 - a) - (-a^2(a+1) + 1 + 0) =$$

$$= (a^2 + a + 1) - (-a^3 - a^2 + 1) = a^3 + 2a^2 + a.$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & a \\ 1 & a+1 & 2a \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 2a^2 + a) - (a^2(a+1) + 0 + 2a(a+1)) =$$

$$= (2a^2 + a) - (a^3 + 3a^2 + 2a) = -a^3 - a^2 - a$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} a+1 & -a & a \\ 1 & 0 & 2a \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 2a^3 + a) - (0 + 0 + 2a(a+1)) =$$

$$= (-2a^3 + a) - (2a^2 + 2a) = -2a^3 - 2a^2 - a$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} 1 & -a & a \\ a+1 & 0 & 2a \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 2a^2 + a(a+1)) - (0 + 0 + 2a) =$$

$$= (-a^2 + a) - 2a = -a^2 - a$$

Observemos ahora que:

$$A_1 = 0 \Leftrightarrow a^3 + 2a^2 + a = 0 \Leftrightarrow a(a^2 + 2a + 1) = 0 \Leftrightarrow a(a+1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ó } a = -1$$

$A_2 = 0 \Leftrightarrow -a^3 - a^2 - a = 0 \Leftrightarrow -a(a^2 + a + 1) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (la ecuación $a^2 + a + 1 = 0$ no tiene soluciones reales)

$A_3 = 0 \Leftrightarrow -2a^3 - 2a^2 - a = 0 \Leftrightarrow -a(2a^2 + 2a + 1) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (la ecuación $2a^2 + 2a + 1 = 0$ no tiene soluciones reales)

$A_4 = 0 \Leftrightarrow -a^2 - a = 0 \Leftrightarrow -a(a + 1) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ó $a = -1$

Por tanto $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0 \Leftrightarrow a = 0$. En este caso la matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ cuyo rango es claramente 2.}$$

Sin embargo si $a \neq 0$ alguno de los determinantes A_1, A_2, A_3, A_4 será necesariamente distinto de cero y en este caso el rango de la matriz A será 3.

$$\text{Resumiendo: } \text{rango}(A) = \begin{cases} 3 & \text{si } a \neq 0 \\ 2 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

No existe ningún valor de a para el que exista A^{-1} , pues A no es una matriz cuadrada (no tiene sentido hablar de inversas de matrices no cuadradas). †

5. Determinar la matriz X, sabiendo que $X \cdot A^2 + B \cdot A = A^2$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Septiembre 1998)

Solución:

$$X \cdot A^2 + B \cdot A = A^2 \Leftrightarrow X \cdot A^2 = A^2 - B \cdot A \Leftrightarrow X = (A^2 - B \cdot A) \cdot (A^2)^{-1}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \text{ y, en este caso se tiene}$$

que $(A^2)^{-1} = I^{-1} = I$.

$$\text{Entonces } X = (A^2 - B \cdot A) \cdot (A^2)^{-1} = (I - B \cdot A) \cdot I = I - B \cdot A =$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \dagger \end{aligned}$$

6. Estudiar el rango de A, según los valores del parámetro $t \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 1 & t+1 & t & t+1 \end{pmatrix}$$

Razonar si para algún valor de t , existe A^{-1} .

(Septiembre 1998)

Solución:

El rango de esta matriz es a lo sumo 3. Utilizaremos la propiedad que dice que el rango de una matriz es el máximo orden de sus menores no nulos.

Los menores de orden 3 de la matriz A son:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ 1 & t+1 & t \end{vmatrix} = (t^2 + 1 + 0) - (0 + 0 + t + 1) = t^2 + t$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t & 0 \\ 1 & t+1 & t+1 \end{vmatrix} = (t(t+1) + 0 + 0) - (t + 0 + 0) = (t^2 + t) - t = t^2$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & t & t+1 \end{vmatrix} = (t + 1 + 0 + 0) - (1 + 0 + 0) = t$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \end{vmatrix} = (t + 1 + 0 + t^2) - (t + 1 + 0 + 0) = t^2$$

Observemos ahora que:

$$A_1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t = 0 \Leftrightarrow t(t^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

$$A_2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

$$A_3 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ (la ecuación } 2a^2 + 2a + 1 = 0 \text{ no tiene soluciones reales)}$$

$$A_4 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Por tanto $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0 \Leftrightarrow t = 0$. En este caso la matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ cuyo rango es claramente 2.}$$

Sin embargo si $t \neq 0$ cualquiera de los determinantes A_1, A_2, A_3, A_4 será distinto de cero y en este caso el rango de la matriz A será 3.

$$\text{Resumiendo: } \text{rango}(A) = \begin{cases} 3 & \text{si } t \neq 0 \\ 2 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

No existe ningún valor de a para el que exista A^{-1} , pues A no es una matriz cuadrada (no tiene sentido hablar de inversas de matrices no cuadradas ya que para éstas no está definido el determinante). †

7. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}$, hallar los valores de x para los cuales la matriz no es invertible. Hallar la inversa de A para $x = 2$.

(Junio 1999)

Solución:

Para que una matriz cuadrada tenga inversa es necesario y suficiente que su determinante sea no nulo. Calculemos pues los valores de x que anulan el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1+0+0) - (x^2+0+0) = 1-x^2$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ó } x = -1$$

Por tanto A no tiene inversa cuando $x = 1$ o cuando $x = -1$, ya que en estos casos el determinante de la matriz A es cero.

Si $x = 2$, la matriz A es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y su determinante será $|A| = 1-2^2 = -3$.

La inversa de la matriz A será $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^d)^t$. Procediendo como en el ejercicio 1:

$$A^d = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^d)^t = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} †$$

8. Determinar la matriz X que verifica $AXA - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(Septiembre 1999)

Solución:

$$AXA - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AXA = B \Leftrightarrow X = A^{-1}BA^{-1}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - (-2) = -1$$

$$\text{La matriz adjunta de } A \text{ es } A^d = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ luego: } A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = A^{-1}BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -13 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \dagger$$

9. Resolver el sistema de ecuaciones matriciales $3X - 2Y = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 16 & 4 \end{pmatrix}$ y

$$X + 3Y = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 27 \end{pmatrix}$$

(Junio 2000)

Solución:

Como $X + 3Y = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 27 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 27 \end{pmatrix} - 3Y$. Sustituyendo en la primera

$$\text{ecuación: } 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 16 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 3 \left[\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 27 \end{pmatrix} - 3Y \right] - 2Y = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 16 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ -6 & 81 \end{pmatrix} - 9Y - 2Y = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 16 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow -11Y = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 16 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ -6 & 81 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$-11Y = \begin{pmatrix} -11 & -33 \\ 22 & -77 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \frac{1}{-11} \begin{pmatrix} -11 & -33 \\ 22 & -77 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo ahora en la expresión de X :

$$X = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 27 \end{pmatrix} - 3Y = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 27 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 27 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \dagger$$

10. Hallar una matriz X que verifique la condición $A + BX = C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(Septiembre 2000)

Solución:

$$A + BX = C \Leftrightarrow BX = C - A \Leftrightarrow X = B^{-1}(C - A)$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \quad (\text{desarrollando por los elementos de la última}$$

c columna). Por tanto B tiene inversa. La adjunta de B es: $B^d = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\text{Por tanto: } B^{-1} = \frac{1}{|B|}(B^d)^t = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Así pues } X = B^{-1}(C - A) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \dagger$$

11. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Halla paso a paso la inversa de la matriz A

b) Calcula la matriz X que verifique la ecuación $AX = B$

(Junio 2001)

Solución:

a) Determinante de A: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3(0-1) = -3$ (desarrollando por

los elementos de la primera columna). Como el determinante de A es distinto de cero, la matriz A tiene inversa.

Matriz adjunta de A: $A^d = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ (sígase el proceso explicado en el

ejercicio 1).

Traspuesta de la adjunta de A: $(A^d)^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz inversa de A: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A^d)^t = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ †

12. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1º - Halla la inversa de $A - BC$. 2º - Resuelve la ecuación matricial $AX - BCX = A$

(Septiembre 2001)

Solución:

1º: Hallemos la inversa de $A - BC$:

$$A - BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$|A - BC| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-6 + 0 + 3) - (-3 + 0 + 1) = -3 - (-2) = -1. \text{ Por tanto la matriz}$$

$$A - BC \text{ tiene inversa. Hallemos su adjunta: } (A - BC)^d = \begin{pmatrix} -7 & -5 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}. \text{ Y por}$$

$$\text{último la inversa: } (A - BC)^{-1} = \frac{1}{|A - BC|} \left((A - BC)^d \right)^t = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -7 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2^\circ: AX - BCX = A \Leftrightarrow (A - BC)X = A \Leftrightarrow X = (A - BC)^{-1} A.$$

$$\text{Por tanto } X = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -13 & 21 \\ 8 & -9 & 16 \\ -10 & 12 & -18 \end{pmatrix} \ddagger$$

13. Resuelve la ecuación matricial $XA - 2B + 3C = D$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

(Septiembre 2002)

Solución:

$$XA - 2B + 3C = D \Leftrightarrow XA = 2B - 3C + D \Leftrightarrow X = (2B - 3C + D)A^{-1}$$

$$2B - 3C + D = 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 14 \end{pmatrix}$$

Hallemos ahora la inversa de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2; A^d = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A^d)^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$X = (2B - 3C + D)A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23/2 & -14 \\ -14 & 21 \end{pmatrix} †$$

14. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donde λ es un número real. Encuentra los valores de λ para los que la matriz $A \cdot B$ es invertible.

(Junio 2003)

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B \text{ no tendrá inversa siempre que } |A \cdot B| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+2\lambda - (1-\lambda)(3+2\lambda) = 0 \Leftrightarrow 1+2\lambda - 3 - 2\lambda + 3\lambda + 2\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 2/4 = 1/2 \\ -8/4 = -2 \end{cases}$$

Por tanto $A \cdot B$ será invertible siempre que $\lambda \neq 1/2$ y $\lambda \neq -2$. †

15. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

- Comprueba que se verifica $A^3 + I = O$, siendo I la matriz identidad y O la matriz nula.
- Justifica que A tiene inversa.

(Septiembre 2003)

Solución:

$$a) \quad A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 + I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

b) Se puede hacer comprobando que el determinante de A es distinto de 0. Pero lo haremos utilizando el apartado anterior:

$$A^3 + I = O \Leftrightarrow -A^3 = I \Leftrightarrow -A^2 \cdot A = A \cdot (-A^2) = I. \text{ De aquí se deduce claramente}$$

$$\text{que } A^{-1} = -A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \dagger$$

16. a) Determina la matriz X para que tenga solución la ecuación $C(A + X)B = I$ donde A, B y C son matrices con inversa de orden n e I es la matriz identidad de orden n.

b) Aplica el resultado anterior para $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(Junio 2004)

Solución:

$$\text{a) } C(A + X)B = I \Leftrightarrow A + X = C^{-1}B^{-1} \Leftrightarrow X = C^{-1}B^{-1} - A$$

$$\text{b) } |C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1. \text{ Por tanto C tiene inversa:}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|} (C^d)^t = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1. \text{ Por tanto B tiene inversa:}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} (B^d)^t = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$X = C^{-1}B^{-1} - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \dagger$$

17. Sean A y B las matrices siguientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ambas son de rango 3. ¿Qué ocurre si las combinamos linealmente? En concreto, estudia el rango de la matriz $A + \lambda B$ según los valores del parámetro λ .

(Septiembre 2004)

Solución:

Ocurre que el rango no tiene porqué conservarse. Veámoslo con las matrices A y B:

$$A + \lambda B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1+\lambda \\ \lambda & 2+\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A + \lambda B| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1+\lambda \\ \lambda & 2+\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2\lambda \end{vmatrix} = (4\lambda + 2\lambda^2 + \lambda + \lambda^2) - (2 + 3\lambda + \lambda^2 + 2\lambda^3) =$$

$$= -2\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda - 2$$

$$|A + \lambda B| = 0 \Leftrightarrow -2\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow -2(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ ó } \lambda = 1$$

Por tanto:

ü Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 1 \Rightarrow \text{rango}(A + \lambda B) = 3$

ü Si $\lambda = -1$, $A + \lambda B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango}(A + \lambda B) = 2$, pues hay un

menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$

ü Si $\lambda = 1$, $A + \lambda B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango}(A + \lambda B) = 2$, pues hay un menor de

orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0$

18. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Halla la matriz inversa de $(A - I)$, siendo I la matriz unidad de orden 3.
b) Halla la matriz X solución de la ecuación $X \cdot A - 2B = X$.

(Septiembre 2004)

Solución:

$$a) \quad A - I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A - I| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1(2 - 3) = 1 \quad (\text{desarrollando por los elementos de la}$$

tercera fila). Entonces $(A - I)^{-1} = \frac{1}{|A - I|} \left((A - I)^d \right)^t = \frac{1}{1} \left((A - I)^d \right)^t = \left((A - I)^d \right)^t$

$$\text{La matriz adjunta de } A - I \text{ es: } (A - I)^d = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Por tanto: } (A - I)^{-1} = \left((A - I)^d \right)^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad X \cdot A - 2B = X \Leftrightarrow X \cdot A - X = 2B \Leftrightarrow X(A - I) = 2B \Leftrightarrow X = 2B(A - I)^{-1}$$

Luego:

$$X = 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \dagger$$

19. Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donde m es un número real. Encuentra los valores de m para los que $A \cdot B$ tiene inversa.

(Septiembre 2005)

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2m & 2+2m \\ 1-m & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B \text{ no tiene inversa} \Leftrightarrow |A \cdot B| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1+2m & 2+2m \\ 1-m & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -(2+2m)(1-m) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -1 \text{ ó } m = 1.$$

Por tanto $A \cdot B$ tendrá inversa siempre que $m \neq -1$ y $m \neq 1$. †

20. a) Despeja la matriz X en función de A e I_2 en la ecuación $(X+A)^2 = X^2 + X \cdot A + I_2$, siendo X y A matrices cuadradas de orden dos, e I_2 la matriz identidad de orden dos.

b) Resuelve la ecuación $B \cdot X + B^2 = I_2$, si $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e I_2 la matriz identidad de orden dos.

(Junio 2006)

Solución:

a) Por un lado $(X+A)^2 = (X+A)(X+A) = X^2 + X \cdot A + A \cdot X + A^2$

Entonces:

$$(X+A)^2 = X^2 + X \cdot A + I_2 \Leftrightarrow X^2 + X \cdot A + A \cdot X + A^2 = X^2 + X \cdot A + I_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A \cdot X + A^2 = I_2 \Leftrightarrow A \cdot X = I_2 - A^2 \Leftrightarrow X = A^{-1}(I_2 - A^2)$$

b) $B \cdot X + B^2 = I_2 \Leftrightarrow B \cdot X = I_2 - B^2 \Leftrightarrow X = B^{-1}(I_2 - B^2)$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1; B^d = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; (B^d)^t = B^d = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por tanto: } B^{-1} = \frac{1}{|B|} (B^d)^t = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por otro lado } I_2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Entonces } X = B^{-1}(I_2 - B^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \dagger$$

21. Calcula el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.

¿Para qué valores del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ tiene inversa la matriz A? (No se pide hallarla.)

(Junio 2007)

Solución:

Como en la matriz A hay un menor de orden dos distinto de 0, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2$, el rango de A es al menos 2, sea quien sea el valor de λ .

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (4\lambda^2 - 2 + 0) - (0 - 2 + 2\lambda) = 4\lambda^2 - 2\lambda$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda(2\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ó } \lambda = 1/2$$

De aquí se deduce que: $\text{rango}(A) = \begin{cases} 2 & \text{si } \lambda = 0 \text{ ó } \lambda = 1/2 \\ 3 & \text{si } \lambda \neq 0 \text{ y } \lambda \neq 1/2 \end{cases}$ y que la matriz A tendrá inversa siempre que $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1/2$. †

22. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X + X = B$, donde X es una matriz de orden 2×2 .

b) Resuelve el sistema $\begin{cases} 2X + 2Y = A \\ 4X + 3Y = B \end{cases}$, siendo X e Y dos matrices de orden 2×2 .

(Septiembre 2007)

Solución:

a) $A \cdot X + X = B \Leftrightarrow (A + I)X = B \Leftrightarrow X = (A + I)^{-1} B$

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; |A + I| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1$$

$$\text{Entonces } (A + I)^{-1} = \frac{1}{|A + I|} \left((A + I)^d \right)^t = \frac{1}{1} \left((A + I)^d \right)^t = \left((A + I)^d \right)^t$$

$$(A + I)^d = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \left((A + I)^d \right)^t. \text{ Por tanto } (A + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Así: } X = (A + I)^{-1} B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Despejemos Y de la primera ecuación:

$$2X + 2Y = A \Leftrightarrow 2Y = A - 2X \Leftrightarrow Y = \frac{1}{2}(A - 2X) \quad (*)$$

Sustituymos en la segunda y despejemos X

$$4X + 3 \frac{1}{2}(A - 2X) = B \Leftrightarrow 4X + \frac{3}{2}A - 3X = B \Leftrightarrow X = B - \frac{3}{2}A$$

$$\text{Entonces: } X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo en (*):

$$Y = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \dagger$$

23. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- Encuentra la expresión general de la potencia n-ésima de A. En otras palabras, calcula la expresión de A^n donde n es un número natural cualquiera.
- Razona que la matriz A^n tiene inversa para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, y calcula dicha matriz inversa.

(Junio 2008)

Solución:

$$\text{a) } A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.....

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } |A^n| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow A^n \text{ tiene inversa para cualquier } n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

En este caso $(A^n)^{-1} = \frac{1}{|A^n|} (A^n)^d = \frac{1}{1} (A^n)^d = (A^n)^d$ y la matriz inversa de A^n

coincide con la traspuesta de su adjunta:

$$(A^n)^{-1} = \left((A^n)^d \right)^t = \begin{pmatrix} 1 & -n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$