Matrices

1. Calcular la matriz X, tal que XB + A = C; siendo

$$A=\begin{pmatrix}4&-2&1\\5&1&-3\end{pmatrix}\;;\;B=\begin{pmatrix}0&3&0\\2&0&1\\0&-3&2\end{pmatrix}\;;\;C=\begin{pmatrix}1&-3&5\\-2&4&-6\end{pmatrix}$$

(Junio 1997)

Solución:

$$X\cdot B+A=C\Rightarrow X\cdot B=C-A\Rightarrow X\cdot B\cdot B^{-1}=(C-A)\cdot B^{-1}\Rightarrow X\cdot I=(C-A)\cdot B^{-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=(C-A)\cdot B^{-1}$$

Por un lado: $C-A=\begin{pmatrix}1&-3&5\\-2&4&-6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&-2&1\\5&1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-1&4\\-7&3&-3\end{pmatrix}$

Por otro, el determinante de la matriz B es (regla de Sarrus):

$|B|=\begin{vmatrix}0&3&0\\2&0&1\\0&-3&2\end{vmatrix}=(0+0+0)-(0+12+0)=-12$. Como B ≠ 0, existe B^{-1}, que la calcularemos mediante la fórmula: $B^{-1}=\dfrac{1}{|B|}\left(B^d\right)^t$, donde B^d es la matriz adjunta de B. Esta última es $B^d=\left(B_{ij}\right)$, en la que B_{ij} son los adjuntos de la matriz B: $B_{ij}=(-1)^{i+j}\Delta_{ij}=\begin{cases}\Delta_{ij} & \text{si } i+j \text{ es par}\\ -\Delta_{ij} & \text{si } i+j \text{ es impar}\end{cases}$, donde Δ_{ij} es el menor complementario de orden 2 correspondiente a la fila i y a la columna j (determinante de orden 2 que resulta de eliminar la fila i y la columna j):

$$B_{11}=\begin{vmatrix}0&1\\-3&2\end{vmatrix}=0-(-3)=3,\;B_{12}=-\begin{vmatrix}2&1\\0&2\end{vmatrix}=-(4-0)=-4,\;B_{13}=\begin{vmatrix}2&0\\0&-3\end{vmatrix}=-6-0=-6$$

$$B_{21}=-\begin{vmatrix}3&0\\-3&2\end{vmatrix}=-(6-0)=-6,\;B_{22}=\begin{vmatrix}0&0\\0&2\end{vmatrix}=0-0=0,\;B_{23}=-\begin{vmatrix}0&3\\0&-3\end{vmatrix}=-(0-0)=0$$

$$B_{31}=\begin{vmatrix}3&0\\0&1\end{vmatrix}=3-0=3,\;B_{32}=-\begin{vmatrix}0&0\\2&1\end{vmatrix}=-(0-0)=0,\;B_{33}=\begin{vmatrix}0&3\\2&0\end{vmatrix}=0-6=-6$$

Por tanto $B^d=\begin{pmatrix}3&-4&-6\\-6&0&0\\3&0&-6\end{pmatrix}$ y $\left(B^d\right)^t=\begin{pmatrix}3&-6&3\\-4&0&0\\-6&0&-6\end{pmatrix}$, y la matriz inversa de B es:

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\left(B^d\right)^t=\frac{1}{-12}\begin{pmatrix}3 & -6 & 3\\ -4 & 0 & 0\\ -6 & 0 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{12} & \frac{6}{12} & -\frac{3}{12}\\ \frac{4}{12} & 0 & 0\\ \frac{6}{12} & 0 & \frac{6}{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Así pues $X=(C-A)\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & -1 & 4\\ -7 & 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{29}{12} & -\frac{3}{2} & \frac{11}{4}\\ \frac{5}{4} & -\frac{7}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$ †

2. Encontrar la matriz X, Sabiendo que $B(A-I)=AXA$.

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ -4 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

(Septiembre 1997)

Solución:

$$B\cdot(A-I)=A\cdot X\cdot A\Rightarrow A^{-1}\cdot B\cdot(A-I)\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot A\cdot A^{-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B\cdot(A-I)\cdot A^{-1}$$

$|A|=\begin{vmatrix}3 & -2 & -1\\ -4 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=(3+4+0)-(-2+8+0)=7-6=1\ \Rightarrow$ A tiene inversa y es $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(A^d\right)^t$.

Procediendo como en el ejercicio anterior, la matriz adjunta de A, A^d, es:

$$A^d=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ 3 & 7 & -5\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(A^d\right)^t=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ 3 & 7 & -5\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 7\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}$$

Por tanto $X=A^{-1}\cdot B\cdot(A-I)\cdot A^{-1}=$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 7\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -2 & -1\\ -4 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 7\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & -4 & 7 \\ -3 & -9 & 16 \\ 2 & 7 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 28 & 2 & 5 \\ 62 & 6 & 12 \\ -50 & -4 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 22 & 46 & 73 \\ 50 & 106 & 168 \\ -40 & -84 & -133 \end{pmatrix} \dagger$$

3. Resolver la ecuación matricial $A^2 \cdot X - B = A^2$ y determinar la matriz X, siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;;\; B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Junio 1998)

Solución:

$$A^2 \cdot X - B = A^2 \Rightarrow A^2 \cdot X = A^2 + B \Rightarrow X = \left(A^2\right)^{-1} \cdot \left(A^2 + B\right)$$

$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\left|A^2\right| = 4$ (A^2 es diagonal y el determinante de una matriz diagonal es el producto de los elementos de la diagonal principal). Por tanto A^2 tiene inversa, que es $\left(A^2\right)^{-1} = \dfrac{1}{\left|A^2\right|}\left(\left(A^2\right)^d\right)^t$. La matriz adjunta de A^2 es (procediendo de manera similar a cómo se hizo en el ejercicio 1):

$$\left(A^2\right)^d = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Por tanto: $\left(A^2\right)^{-1} = \dfrac{1}{\left|A^2\right|}\left(\left(A^2\right)^d\right)^t = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Entonces: $X = \left(A^2\right)^{-1} \cdot \left(A^2 + B\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right] =$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} †$$

4. Estudiar el rango de A, según los valores del parámetro $a \in$ ¡ .

$$A=\begin{pmatrix} a+1 & 1 & -a & a \\ 1 & a+1 & 0 & 2a \\ a & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Razonar si para algún valor de a existe A^{-1}.

(Junio 1998)

Solución:

El rango de esta matriz es a lo sumo 3. Utilizaremos la propiedad que dice que el rango de una matriz es el máximo orden de sus menores no nulos.

Los menores de orden 3 de la matriz A son:

$$A_1=\begin{vmatrix} a+1 & 1 & -a \\ 1 & a+1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}=\left((a+1)^2+0-a\right)-\left(-a^2(a+1)+1+0\right)=$$

$$=\left(a^2+a+1\right)-\left(-a^3-a^2+1\right)=a^3+2a^2+a\,.$$

$$A_2=\begin{vmatrix} a+1 & 1 & a \\ 1 & a+1 & 2a \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix}=\left(0+2a^2+a\right)-\left(a^2(a+1)+0+2a(a+1)\right)=$$

$$=\left(2a^2+a\right)-\left(a^3+3a^2+2a\right)=-a^3-a^2-a$$

$$A_3=\begin{vmatrix} a+1 & -a & a \\ 1 & 0 & 2a \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix}=\left(0-2a^3+a\right)-\left(0+0+2a(a+1)\right)=$$

$$=\left(-2a^3+a\right)-\left(2a^2+2a\right)=-2a^3-2a^2-a$$

$$A_4=\begin{vmatrix} 1 & -a & a \\ a+1 & 0 & 2a \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\left(0-2a^2+a(a+1)\right)-\left(0+0+2a\right)=$$

$$=\left(-a^2+a\right)-2a=-a^2-a$$

Observemos ahora que:

$$A_1=0 \Leftrightarrow a^3+2a^2+a=0 \Leftrightarrow a\left(a^2+2a+1\right)=0 \Leftrightarrow a(a+1)^2=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ó } a=-1$$

$A_2 = 0 \Leftrightarrow -a^3 - a^2 - a = 0 \Leftrightarrow -a\left(a^2 + a + 1\right) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (la ecuación $a^2 + a + 1 = 0$ no tiene soluciones reales)

$A_3 = 0 \Leftrightarrow -2a^3 - 2a^2 - a = 0 \Leftrightarrow -a\left(2a^2 + 2a + 1\right) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (la ecuación $2a^2 + 2a + 1 = 0$ no tiene soluciones reales)

$A_4 = 0 \Leftrightarrow -a^2 - a = 0 \Leftrightarrow -a\left(a + 1\right) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ó } a = -1$

Por tanto $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0 \Leftrightarrow a = 0$. En este caso la matriz A es:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, cuyo rango es claramente 2.

Sin embargo si $a \neq 0$ alguno de los determinantes A_1, A_2, A_3, A_4 será necesariamente distinto de cero y en este caso el rango de la matriz A será 3.

Resumiendo: $\text{rango}(A) = \begin{cases} 3 & \text{si } a \neq 0 \\ 2 & \text{si } a = 0 \end{cases}$

No existe ningún valor de a para el que exista A^{-1}, pues A no es una matriz cuadrada (no tiene sentido hablar de inversas de matrices no cuadradas). †

5. Determinar la matriz X, sabiendo que $X \cdot A^2 + B \cdot A = A^2$, siendo:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(Septiembre 1998)

Solución:

$$X \cdot A^2 + B \cdot A = A^2 \Leftrightarrow X \cdot A^2 = A^2 - B \cdot A \Leftrightarrow X = \left(A^2 - B \cdot A\right) \cdot \left(A^2\right)^{-1}$$

$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ y, en este caso se tiene que $\left(A^2\right)^{-1} = I^{-1} = I$.

Entonces $X = \left(A^2 - B \cdot A\right) \cdot \left(A^2\right)^{-1} = \left(I - B \cdot A\right) \cdot I = I - B \cdot A =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ †

6. Estudiar el rango de A, según los valores del parámetro $t \in$ ¡ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 1 & t+1 & t & t+1 \end{pmatrix}$$

Razonar si para algún valor de t, existe A^{-1}.

(Septiembre 1998)

Solución:

El rango de esta matriz es a lo sumo 3. Utilizaremos la propiedad que dice que el rango de una matriz es el máximo orden de sus menores no nulos.

Los menores de orden 3 de la matriz A son:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ 1 & t+1 & t \end{vmatrix} = \left(t^2+1+0\right) - \left(0+0+t+1\right) = t^2 + t$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t & 0 \\ 1 & t+1 & t+1 \end{vmatrix} = \left(t\left(t+1\right)+0+0\right) - \left(t+0+0\right) = \left(t^2+t\right) - t = t^2$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & t & t+1 \end{vmatrix} = \left(t+1+0+0\right) - \left(1+0+0\right) = t$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \end{vmatrix} = \left(t+1+0+t^2\right) - \left(t+1+0+0\right) = t^2$$

Observemos ahora que:

$$A_1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t = 0 \Leftrightarrow t\left(t^2+1\right) = 0 \;\Leftrightarrow t = 0$$

$$A_2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

$A_3 = 0 \Leftrightarrow t = 0$ (la ecuación $2a^2 + 2a + 1 = 0$ no tiene soluciones reales)

$$A_4 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Por tanto $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0 \Leftrightarrow t = 0$. En este caso la matriz A es:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es claramente 2.

Sin embargo si $t \neq 0$ cualquiera de los determinantes A_1, A_2, A_3, A_4 será distinto de cero y en este caso el rango de la matriz A será 3.

Resumiendo: $\text{rango}(A) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 2 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$

No existe ningún valor de a para el que exista A^{-1}, pues A no es una matriz cuadrada (no tiene sentido hablar de inversas de matrices no cuadradas ya que para éstas no está definido el determinante). †

7. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}$, hallar los valores de x para los cuales la matriz no es invertible. Hallar la inversa de A para x = 2.

(Junio 1999)

Solución:

Para que una matriz cuadrada tenga inversa es necesario y suficiente que su determinante sea no nulo. Calculemos pues los valores de x que anulan el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1+0+0) - \left(x^2+0+0\right) = 1 - x^2$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ó } x = -1$$

Por tanto A no tiene inversa cuando x = 1 o cuando x = −1, ya que en estos casos el determinante de la matriz A es cero.

Si x = 2, la matriz A es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y su determinante será $|A| = 1 - 2^2 = -3$.

La inversa de la matriz A será $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\left(A^d\right)^t$. Procediendo como en el ejercicio 1:

$$A^d = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A^d\right)^t = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$ †

8. Determinar la matriz X que verifica $AXA-B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, siendo $A=\begin{pmatrix}3&1\\-2&-1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}5&-2\\1&3\end{pmatrix}$.

(Septiembre 1999)

Solución:

$$AXA-B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow AXA=B\Leftrightarrow X=A^{-1}BA^{-1}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}3&1\\-2&-1\end{vmatrix}=-3-(-2)=-1$$

La matriz adjunta de A es $A^d=\begin{pmatrix}-1&2\\-1&3\end{pmatrix}$, luego: $A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-1&-1\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-2&-3\end{pmatrix}$

Por tanto:

$$X=A^{-1}BA^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\-2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&1\\-13&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3\\-3&2\end{pmatrix}\dagger$$

9. Resolver el sistema de ecuaciones matriciales $3X-2Y=\begin{pmatrix}7&3\\16&4\end{pmatrix}$ y $X+3Y=\begin{pmatrix}6&12\\-2&27\end{pmatrix}$

(Junio 2000)

Solución:

Como $X+3Y=\begin{pmatrix}6&12\\-2&27\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}6&12\\-2&27\end{pmatrix}-3Y$. Sustituyendo en la primera ecuación: $3X-2Y=\begin{pmatrix}7&3\\16&4\end{pmatrix}\Rightarrow 3\left[\begin{pmatrix}6&12\\-2&27\end{pmatrix}-3Y\right]-2Y=\begin{pmatrix}7&3\\16&4\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}18&36\\-6&81\end{pmatrix}-9Y-2Y=\begin{pmatrix}7&3\\16&4\end{pmatrix}\Rightarrow -11Y=\begin{pmatrix}7&3\\16&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}18&36\\-6&81\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$-11Y=\begin{pmatrix}-11&-33\\22&-77\end{pmatrix}\Rightarrow Y=\frac{1}{-11}\begin{pmatrix}-11&-33\\22&-77\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\-2&7\end{pmatrix}$$

Sustituyendo ahora en la expresión de X:

$$X=\begin{pmatrix}6&12\\-2&27\end{pmatrix}-3Y=\begin{pmatrix}6&12\\-2&27\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&3\\-2&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&12\\-2&27\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&9\\-6&21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\4&6\end{pmatrix}\dagger$$

10. Hallar una matriz X que verifique la condición A + BX = C, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&6&-2\\1&-1&2\end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\ \text{y}\ C=\begin{pmatrix}0&2&1\\1&2&0\\0&-1&3\end{pmatrix}$$

(Septiembre 2000)

Solución:

$$A+BX=C\Leftrightarrow BX=C-A\Leftrightarrow X=B^{-1}(C-A)$$

$|B|=\begin{vmatrix}-1&1&0\\2&0&0\\-1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1\\2&0\end{vmatrix}=0-2=-2$ (desarrollando por los elementos de la última columna). Por tanto B tiene inversa. La adjunta de B es: $B^d=\begin{pmatrix}0&-2&0\\-1&-1&-1\\0&0&-2\end{pmatrix}$

Por tanto: $B^{-1}=\dfrac{1}{|B|}\left(B^d\right)^t=\dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix}0&-1&0\\-2&-1&0\\0&-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\1&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$

Así pues $X=B^{-1}(C-A)=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\1&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}0&2&1\\1&2&0\\0&-1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&6&-2\\1&-1&2\end{pmatrix}\right]=$

$$=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\1&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\2&-4&2\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&-2&1\\0&-2&2\end{pmatrix}\ \dagger$$

11. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}3&0&2\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

a) Halla paso a paso la inversa de la matriz A

b) Calcula la matriz X que verifique la ecuación AX = B

(Junio 2001)

Solución:

a) Determinante de A: $|A|=\begin{vmatrix}3&0&2\\0&0&1\\0&1&0\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=3(0-1)=-3$ (desarrollando por los elementos de la primera columna). Como el determinante de A es distinto de cero, la matriz A tiene inversa.

Matriz adjunta de A: $A^d=\begin{pmatrix}-1&0&0\\2&0&-3\\0&-3&0\end{pmatrix}$ (sígase el proceso explicado en el ejercicio 1).

Traspuesta de la adjunta de A: $\left(A^d\right)^t=\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&0&-3\\0&-3&0\end{pmatrix}$

Matriz inversa de A: $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\left(A^d\right)^t=\dfrac{1}{-3}\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&0&-3\\0&-3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3&-2/3&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

b) $AX=B\Leftrightarrow X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1/3&-2/3&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ †

12. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&0&-3\\-1&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\0&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0&-1&2\\-2&1&-1\end{pmatrix}$

1º - Halla la inversa de A − BC. 2º - Resuelve la ecuación matricial AX − BCX = A

(Septiembre 2001)

Solución:

1º: Hallemos la inversa de A − BC:

$$A-BC=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&0&-3\\-1&2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&2\\-2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&0&-3\\-1&2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-1&2\\-4&3&-4\\-2&1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

$|A-BC|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=(-6+0+3)-(-3+0+1)=-3-(-2)=-1$. Por tanto la matriz A − BC tiene inversa. Hallemos su adjunta: $(A-BC)^d=\begin{pmatrix}-7 & -5 & 6\\ 1 & 1 & -1\\ 3 & 2 & -3\end{pmatrix}$. Y por último la inversa: $(A-BC)^{-1}=\dfrac{1}{|A-BC|}\left((A-BC)^d\right)^t=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix}-7 & 1 & 3\\ -5 & 1 & 2\\ 6 & -1 & -3\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}7 & -1 & -3\\ 5 & -1 & -2\\ -6 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

2º: $AX-BCX=A\Leftrightarrow (A-BC)X=A\Leftrightarrow X=(A-BC)^{-1}A$.

Por tanto $X=\begin{pmatrix}7 & -1 & -3\\ 5 & -1 & -2\\ -6 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ -1 & 0 & -3\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & -13 & 21\\ 8 & -9 & 16\\ -10 & 12 & -18\end{pmatrix}$ †

13. Resuelve la ecuación matricial XA − 2B + 3C = D, siendo $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -3 & 6\end{pmatrix}$.

(Septiembre 2002)

Solución:

$$XA-2B+3C=D\Leftrightarrow XA=2B-3C+D\Leftrightarrow X=(2B-3C+D)A^{-1}$$

$$2B-3C+D=2\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 4\\ -3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 2 & 8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 9\\ 6 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 4\\ -3 & 6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}9 & -5\\ -7 & 14\end{pmatrix}$$

Hallemos ahora la inversa de A:

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4-2=2;\ A^d=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A^d\right)^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$X = (2B - 3C + D)\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23/2 & -14 \\ -14 & 21 \end{pmatrix}$$ †

14. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donde λ es un número real. Encuentra los valores de λ para los que la matriz $A \cdot B$ es invertible.

(Junio 2003)

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B$ no tendrá inversa siempre que $|A \cdot B| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1+2\lambda-(1-\lambda)(3+2\lambda)=0 \Leftrightarrow 1+2\lambda-3-2\lambda+3\lambda+2\lambda^2=0 \Leftrightarrow 2\lambda^2+3\lambda-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4\cdot 2\cdot(-2)}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 2/4 = 1/2 \\ -8/4 = -2 \end{cases}$$

Por tanto $A \cdot B$ será invertible siempre que $\lambda \neq 1/2$ y $\lambda \neq -2$. †

15. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que se verifica $A^3 + I = O$, siendo I la matriz identidad y O la matriz nula.

b) Justifica que A tiene inversa.

(Septiembre 2003)

Solución:

a) $$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3+I=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O$$

b) Se puede hacer comprobando que el determinante de A es distinto de 0. Pero lo haremos utilizando el apartado anterior:

$A^3+I=O \Leftrightarrow -A^3=I \Leftrightarrow -A^2\cdot A=A\cdot\left(-A^2\right)=I$. De aquí se deduce claramente que $A^{-1}=-A^2=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&-4&-4\\1&3&3\end{pmatrix}$ †

16. a) Determina la matriz X para que tenga solución la ecuación C(A + X)B = I donde A, B y C son matrices con inversa de orden n e I es la matriz identidad de orden n.

b) Aplica el resultado anterior para $A=\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$.

(Junio 2004)

Solución:

a) $C\left(A+X\right)B=I \Leftrightarrow A+X=C^{-1}B^{-1} \Leftrightarrow X=C^{-1}B^{-1}-A$

b) $|C|=\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1-0=1$. Por tanto C tiene inversa:

$$C^{-1}=\frac{1}{|C|}\left(C^d\right)^t=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$$

$|B|=\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1-0=1$. Por tanto B tiene inversa:

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\left(C^d\right)^t=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$$

Entonces:

$$X=C^{-1}B^{-1}-A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-5\\-2&0\end{pmatrix}$$ †

17. Sean A y B las matrices siguientes: $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. Ambas son de rango 3. ¿Qué ocurre si las combinamos linealmente? En concreto, estudia el rango de la matriz $A+\lambda B$ según los valores del parámetro λ.

(Septiembre 2004)

Solución:

Ocurre que el rango no tiene porqué conservarse. Veámoslo con las matrices A y B:

$$A+\lambda B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&1&0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&\lambda&\lambda\\\lambda&\lambda&0\\0&0&2\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\lambda&1+\lambda\\\lambda&2+\lambda&0\\1&1&2\lambda\end{pmatrix}$$

$$|A+\lambda B|=\begin{vmatrix}1&\lambda&1+\lambda\\\lambda&2+\lambda&0\\1&1&2\lambda\end{vmatrix}=(4\lambda+2\lambda^2+\lambda+\lambda^2)-(2+3\lambda+\lambda^2+2\lambda^3)=$$

$$=-2\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda-2$$

$$|A+\lambda B|=0\Leftrightarrow -2\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda-2=0\Leftrightarrow -2(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0\Leftrightarrow \lambda=-1 \text{ ó } \lambda=1$$

Por tanto:

- Si $\lambda\neq-1$ y $\lambda\neq1\Rightarrow$ rango$(A+\lambda B)=3$
- Si $\lambda=-1$, $A+\lambda B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\1&1&-2\end{pmatrix}\Rightarrow$ rango$(A+\lambda B)=2$, pues hay un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix}-1&1\\1&1\end{vmatrix}=-1-1=-2$
- Si $\lambda=1$, $A+\lambda B=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&3&0\\1&1&2\end{pmatrix}\Rightarrow$ rango$(A+\lambda B)=2$, pues hay un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}=3-1=2$ †

18. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}3&0&3\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$

a) Halla la matriz inversa de (A − I), siendo I la matriz unidad de orden 3.

b) Halla la matriz X solución de la ecuación $X\cdot A-2B=X$.

(Septiembre 2004)

Solución:

a) $A-I=\begin{pmatrix}3&0&3\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&3\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

$|A-I|=\begin{vmatrix}2&0&3\\1&0&1\\0&1&0\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}2&3\\1&1\end{vmatrix}=-1(2-3)=1$ (desarrollando por los elementos de la tercera fila). Entonces $(A-I)^{-1}=\dfrac{1}{|A-I|}\left((A-I)^d\right)^t=\dfrac{1}{1}\left((A-I)^d\right)^t=\left((A-I)^d\right)^t$

La matriz adjunta de A − I es: $(A-I)^d=\begin{pmatrix}-1&0&1\\3&0&-2\\0&1&0\end{pmatrix}$.

Por tanto: $(A-I)^{-1}=\left((A-I)^d\right)^t=\begin{pmatrix}-1&3&0\\0&0&1\\1&-2&0\end{pmatrix}$

b) $X\cdot A-2B=X\Leftrightarrow X\cdot A-X=2B\Leftrightarrow X(A-I)=2B\Leftrightarrow X=2B(A-I)^{-1}$

Luego:

$$X=2\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3&0\\0&0&1\\1&-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&0&0\\2&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3&0\\0&0&1\\1&-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&8&2\\-2&6&0\\0&2&-2\end{pmatrix}$$ †

19. Se consideran las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & m\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ m & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, donde m es un número real. Encuentra los valores de m para los que $A\cdot B$ tiene inversa.

(Septiembre 2005)

Solución:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & m\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ m & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2m & 2+2m\\ 1-m & 0\end{pmatrix}$$

$A\cdot B$ no tiene inversa $\Leftrightarrow$ $|A\cdot B|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}1+2m & 2+2m\\ 1-m & 0\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -(2+2m)(1-m)=0$

$\Leftrightarrow$ m = −1 ó m = 1.

Por tanto $A\cdot B$ tendrá inversa siempre que $m\neq -1$ y $m\neq 1$. †

20. a) Despeja la matriz X en función de A e I_2 en la ecuación $(X+A)^2=X^2+X\cdot A+I_2$, siendo X y A matrices cuadradas de orden dos, e I_2 la matriz identidad de orden dos.

b) Resuelve la ecuación $B\cdot X+B^2=I_2$, si $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ e I_2 la matriz identidad de orden dos.

(Junio 2006)

Solución:

a) Por un lado $(X+A)^2=(X+A)(X+A)=X^2+X\cdot A+A\cdot X+A^2$

Entonces:

$$(X+A)^2=X^2+X\cdot A+I_2 \Leftrightarrow X^2+X\cdot A+A\cdot X+A^2=X^2+X\cdot A+I_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A\cdot X+A^2=I_2 \Leftrightarrow A\cdot X=I_2-A^2 \Leftrightarrow X=A^{-1}\left(I_2-A^2\right)$$

b) $B\cdot X+B^2=I_2 \Leftrightarrow B\cdot X=I_2-B^2 \Leftrightarrow X=B^{-1}\left(I_2-B^2\right)$

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0-1=-1\ ;\ B^d=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\ ;\ \left(B^d\right)^t=B^d=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Por tanto: $B^{-1}=\frac{1}{|B|}\left(B^d\right)^t=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

Por otro lado $I_2-B^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

Entonces $X = B^{-1}\left(I_2 - B^2\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ †

21. Calcula el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ en función del parámetro $\lambda \in$ ¡ .

¿Para qué valores del parámetro $\lambda \in$ ¡ tiene inversa la matriz A? (No se pide hallarla.)

(Junio 2007)

Solución:

Como en la matriz A hay un menor de orden dos distinto de 0, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2$, el rango de A es al menos 2, sea quien sea el valor de λ.

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \left(4\lambda^2 - 2 + 0\right) - \left(0 - 2 + 2\lambda\right) = 4\lambda^2 - 2\lambda$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda\left(2\lambda - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ó } \lambda = 1/2$$

De aquí se deduce que: $\operatorname{rango}(A) = \begin{cases} 2 & \text{si } \lambda = 0 \text{ ó } \lambda = 1/2 \\ 3 & \text{si } \lambda \neq 0 \text{ y } \lambda \neq 1/2 \end{cases}$ y que la matriz A tendrá inversa siempre que $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1/2$. †

22. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X + X = B$, donde X es una matriz de orden 2×2.

b) Resuelve el sistema $\begin{cases} 2X + 2Y = A \\ 4X + 3Y = B \end{cases}$, siendo X e Y dos matrices de orden 2×2.

(Septiembre 2007)

Solución:

a) $A \cdot X + X = B \Leftrightarrow \left(A + I\right)X = B \Leftrightarrow X = \left(A + I\right)^{-1} B$

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \; ; \; |A + I| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1$$

Entonces $\left(A + I\right)^{-1} = \dfrac{1}{|A + I|}\left(\left(A + I\right)^d\right)^t = \dfrac{1}{1}\left(\left(A + I\right)^d\right)^t = \left(\left(A + I\right)^d\right)^t$

$\left(A + I\right)^d = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \left(\left(A + I\right)^d\right)^t$. Por tanto $\left(A + I\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Así: $X = (A+I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) Despejemos Y de la primera ecuación:

$$2X + 2Y = A \Leftrightarrow 2Y = A - 2X \Leftrightarrow Y = \frac{1}{2}(A - 2X) \ \textbf{(*)}$$

Sustituyamos en la segunda y despejemos X

$$4X + 3\frac{1}{2}(A - 2X) = B \Leftrightarrow 4X + \frac{3}{2}A - 3X = B \Leftrightarrow X = B - \frac{3}{2}A$$

Entonces: $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$

Y sustituyendo en **(*)**:

$$Y = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \dagger$$

23. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Encuentra la expresión general de la potencia n-ésima de A. En otras palabras, calcula la expresión de A^n donde n es un número natural cualquiera.

b) Razona que la matriz A^n tiene inversa para cualquier $n \in$ ¥ , $n \geq 1$, y calcula dicha matriz inversa.

(Junio 2008)

Solución:

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

....

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $\left|A^n\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow A^n$ tiene inversa para cualquier $n \in ¥$, $n \geq 1$.

En este caso $\left(A^n\right)^{-1} = \dfrac{1}{\left|A^n\right|}\left(A^n\right)^d = \dfrac{1}{1}\left(A^n\right)^d = \left(A^n\right)^d$ y la matriz inversa de A^n coincide con la traspuesta de su adjunta:

$$\left(A^n\right)^{-1} = \left(\left(A^n\right)^d\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & -n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ †