

Integrales indefinidas

1. Calcular $\int \frac{2x^2 - 4x + 1}{x(x^2 - 2x + 1)} dx$

(Junio 1997)

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 - 4x + 1}{x(x^2 - 2x + 1)} &= \frac{2x^2 - 4x + 1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2} = \\ &= \frac{(A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A}{x(x-1)^2} \Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ -2A-B+C=-4 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \\ C=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x^2 - 4x + 1}{x(x^2 - 2x + 1)} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{-1}{(x-1)^2} dx = \ln|x| + \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + C . \dagger$$

2. Calcular $\int \cos \sqrt{3x} dx$

(Septiembre 1997)

Solución:

Llamemos $\sqrt{3x} = t \Rightarrow \frac{3}{2\sqrt{3x}} dx = dt \Rightarrow \frac{3}{2t} dx = dt \Rightarrow dx = \frac{2t}{3} dt$. Entonces, primero por sustitución y la que resulta por partes, tenemos:

$$\begin{aligned} \int \cos \sqrt{3x} dx &= \frac{2}{3} \int t \cos t dt = \left[\begin{array}{l} u = t \quad dv = \cos t dt \\ du = dt \quad v = \sin t \end{array} \right] = \frac{2}{3} (t \sin t - \int \sin t dt) = \\ &= \frac{2}{3} (t \sin t - (-\cos t)) + C = \frac{2}{3} (t \sin t + \cos t) + C = \frac{2}{3} (\sqrt{3x} \sin \sqrt{3x} + \cos \sqrt{3x}) + C . \dagger \end{aligned}$$

3. Calcular $I = \int (2x + 4) \cdot e^{-5x} dx$

(Junio 1998)

Solución:

La integramos por partes:

$$\begin{aligned} \int (2x + 4) \cdot e^{-5x} dx &= \left[\begin{array}{l} u = 2x + 4 \quad dv = e^{-5x} dx \\ du = 2dx \quad v = \frac{-1}{5} e^{-5x} \end{array} \right] = (2x + 4) \frac{-1}{5} e^{-5x} - \int \frac{-2}{5} \cdot e^{-5x} dx = \\ &= -\frac{(2x + 4)}{5} e^{-5x} + \frac{2}{5} \int e^{-5x} dx = -\frac{(2x + 4)}{5} e^{-5x} + \frac{2}{5} \frac{-1}{5} e^{-5x} + C = \\ &= \frac{-1}{5} e^{-5x} \left(2x + \frac{22}{5} \right) + C . \dagger \end{aligned}$$

4. Calcular la integral $I = \int \frac{x^2 + 4}{x^2 - 5x + 4} dx$

(Septiembre 1998)

Solución:

Como el numerador y denominador tienen el mismo grado efectuamos la división. Se obtiene: $x^2 + 4 = (x^2 - 5x + 4) \cdot 1 + 5x$. Dividiendo los dos miembros entre

$$x^2 - 5x + 4: \frac{x^2 + 4}{x^2 - 5x + 4} = 1 + \frac{5x}{x^2 - 5x + 4}.$$

$$\begin{aligned} \text{Pero } \frac{5x}{x^2 - 5x + 4} &= \frac{5x}{(x-1)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4) + B(x-1)}{(x-1)(x-4)} = \\ &= \frac{(A+B)x + (-4A-B)}{(x-1)(x-4)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=5 \\ -4A-B=0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{-5}{3}; B = \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Entonces } \frac{x^2 + 4}{x^2 - 5x + 4} = 1 + \frac{5x}{x^2 - 5x + 4} = 1 - \frac{5}{3(x-1)} + \frac{20}{3(x-4)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Por tanto: } \int \frac{x^2 + 4}{x^2 - 5x + 4} dx &= \int dx - \frac{5}{3} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{20}{3} \int \frac{1}{x-4} dx = \\ &= x - \frac{5}{3} \ln|x-1| + \frac{20}{3} \ln|x-4| + C. \end{aligned}$$

5. Calcular $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 13} dx$

(Junio 1999)

Solución:

Al igual que en el ejercicio anterior, efectuando la división se tiene:

$$x^2 + 1 = (x^2 - 4x + 13) \cdot 1 + 4x \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 13} = 1 + \frac{4x}{x^2 - 4x + 13}$$

El polinomio $x^2 - 4x + 13$ no tiene raíces reales. Descompongamos el numerador buscando una expresión que sea la derivada del denominador, es decir, $2x - 4$:

$$4x = \frac{4}{2}(2x - 4 + 4) = 2(2x - 4) + 8.$$

$$\text{Entonces: } \frac{4x}{x^2 - 4x + 13} = \frac{2(2x - 4)}{x^2 - 4x + 13} + \frac{8}{x^2 - 4x + 13}. \text{ Por tanto:}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 13} dx &= \int \left(1 + \frac{4x}{x^2 - 4x + 13} \right) dx = \int \left(1 + \frac{2(2x - 4)}{x^2 - 4x + 13} + \frac{8}{x^2 - 4x + 13} \right) dx = \\ &= \int dx + 2 \int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 13} dx + \int \frac{8}{x^2 - 4x + 13} dx = (*) \end{aligned}$$

La última integral se calcula modificando adecuadamente la expresión $x^2 - 4x + 13$ en otra del tipo $(x - m)^2 + n^2$. En este caso $x^2 - 4x + 13 = (x - 2)^2 + 3^2$. Por tanto

$$\begin{aligned}
 (*) &= \int dx + 2 \int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 13} dx + \int \frac{8}{(x - 2)^2 + 3^2} dx = \\
 &= \int dx + 2 \int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 13} dx + \int \frac{\frac{8}{9}}{\left(\frac{x - 2}{3}\right)^2 + 1} dx = \\
 &= \int dx + 2 \int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 13} dx + \frac{8}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{x - 2}{3}\right)^2 + 1} dx = \\
 &= x + 2 \ln |x^2 - 4x + 13| + \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{x - 2}{3} \right) + C. \dagger
 \end{aligned}$$

6. Calcular $\int x^3 e^{-4x^2} dx$

(Septiembre 1999)

Solución:

Procederemos por partes. Como la derivada de la función $y = e^{-4x^2}$ es $y' = -8xe^{-4x^2}$, tomaremos como función $u = x^2$, para que $dv = xe^{-4x^2} dx$ sea fácil de integrar:

$$\begin{aligned}
 \int x^3 e^{-4x^2} dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^2 \quad dv = xe^{-4x^2} dx \\ du = 2x dx \quad v = \frac{-1}{8} e^{-4x^2} \end{array} \right] = \frac{-1}{8} x^2 e^{-4x^2} - \int 2x \frac{-1}{8} e^{-4x^2} dx = \\
 &= \frac{-1}{8} x^2 e^{-4x^2} + \frac{1}{4} \int xe^{-4x^2} dx = \frac{-1}{8} x^2 e^{-4x^2} + \frac{1}{4} \frac{-1}{8} \int -8xe^{-4x^2} dx = \frac{-1}{8} x^2 e^{-4x^2} + \frac{1}{4} \frac{-1}{8} e^{-4x^2} + C = \\
 &= \frac{-1}{8} x^2 e^{-4x^2} + \frac{1}{4} \frac{-1}{8} e^{-4x^2} + C = \frac{-1}{8} e^{-4x^2} \left(x^2 + \frac{1}{4} \right) + C. \dagger
 \end{aligned}$$

7. Calcular $\int \frac{x + 1}{x^3 + x^2 - 6x} dx$

(Junio 2000)

Solución:

$$\begin{aligned}
 \frac{x + 1}{x^3 + x^2 - 6x} &= \frac{x + 1}{x(x - 2)(x + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 3} = \\
 &= \frac{A(x - 2)(x + 3) + Bx(x + 3) + Cx(x - 2)}{x(x - 2)(x + 3)} = \frac{(A + B + C)x^2 + (A + 3B - 2C)x - 6A}{x(x - 2)(x + 3)} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B + C = 0 \\ A + 3B - 2C = 1 \\ -6A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{-1}{6} \\ B = \frac{3}{10} \\ C = \frac{-2}{15} \end{cases} \Rightarrow \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{-1}{6x} + \frac{3}{10(x-2)} + \frac{-2}{15(x+3)}$$

$$\begin{aligned} \text{Por tanto } \int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} dx &= \frac{-1}{6} \int \frac{1}{x} dx + \frac{3}{10} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{2}{15} \int \frac{1}{x+3} dx = \\ &= \frac{-1}{6} \ln|x| + \frac{3}{10} \ln|x-2| - \frac{2}{15} \ln|x+3| + C. \dagger \end{aligned}$$

8. Calcular $\int \frac{3x}{x^2+2x+3} dx$

(Septiembre 2000)

Solución:

El polinomio x^2+2x+3 no tiene raíces reales. Descompongamos el numerador buscando una expresión que sea la derivada del denominador, es decir, $2x+2$:

$$3x = \frac{3}{2}(2x+2-2) = \frac{3}{2}(2x+2) - 3.$$

Entonces: $\frac{3x}{x^2+2x+3} = \frac{3}{2} \frac{2x+2}{x^2+2x+3} - \frac{3}{x^2+2x+3}$. De este modo:

$$\int \frac{3x}{x^2+2x+3} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx - 3 \int \frac{1}{x^2+2x+3} dx = (*)$$

La última integral se calcula modificando adecuadamente la expresión x^2+2x+3 en otra del tipo $(x-m)^2+n^2$. En este caso $x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 = (x+1)^2 + \sqrt{2}^2$.

$$\text{Por tanto: } (*) = \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx - 3 \int \frac{1}{(x+1)^2+2} dx =$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx - 3 \int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx =$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx - \frac{3\sqrt{2}}{2} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx =$$

$$= \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+3) - \frac{3\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C. \dagger$$

9. Resuelve $\int \frac{x^2-1}{x(x^2+1)} dx$

(Junio 2001)

Solución:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)x}{x(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{x(x^2+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ C=0 \\ A=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \\ C=0 \end{cases} .$$

Entonces:

$$\int \frac{x^2-1}{x(x^2+1)} dx = \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{2x}{x^2+1} dx = -\ln|x| + \ln|x^2+1| + C = \ln \left| \frac{x^2+1}{x} \right| + C . \dagger$$

10. Calcula $\int \frac{x+2}{x^3-4x^2+4x} dx$

(Septiembre 2001)

Solución:

$$\frac{x+2}{x^3-4x^2+4x} = \frac{x+2}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx}{x(x-2)^2} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (-4A-2B+C)x + 4A}{x(x-2)^2} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -4A-2B+C=1 \\ 4A=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=2 \end{cases} . \text{ Por tanto:}$$

$$\int \frac{x+2}{x^3-4x^2+4x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-2} dx + 2 \int \frac{1}{(x-2)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x}{x-2} \right| - \frac{2}{x-2} + C = \ln \sqrt{\left| \frac{x}{x-2} \right|} - \frac{2}{x-2} + C . \dagger$$

11. Calcula $\int \frac{x^2-2}{x^3-3x+2} dx$

(Septiembre 2002)

Solución:

$$\frac{x^2-2}{x^3-3x+2} = \frac{x^2-2}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{A(x-1)^2 + B(x+2)(x-1) + C(x+2)}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (-2A+B+C)x + (A-2B+2C)}{(x+2)(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ -2A+B+C=0 \\ A-2B+2C=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{9} \\ B = \frac{7}{9} \\ C = \frac{-1}{3} \end{cases} .$$

$$\begin{aligned} \text{Por tanto } \int \frac{x^2-2}{x^3-3x+2} dx &= \frac{2}{9} \int \frac{1}{x+2} dx + \frac{7}{9} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \\ &= \frac{2}{9} \ln|x+2| + \frac{7}{9} \ln|x-1| + \frac{1}{3(x-1)} + C . \dagger \end{aligned}$$

12. Calcula la siguiente integral: $\int \frac{Lx}{x} dx$ (L = logaritmo neperiano)

(Septiembre 2003)

Solución:

Procedamos por partes:

$$\begin{aligned} \int \frac{Lx}{x} dx &= \left[\begin{array}{ll} u = Lx & dv = \frac{1}{x} dx \\ du = \frac{1}{x} dx & v = Lx \end{array} \right] = (Lx)(Lx) - \int \frac{Lx}{x} dx \Rightarrow 2 \int \frac{Lx}{x} dx = (Lx)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \int \frac{Lx}{x} dx &= \frac{(Lx)^2}{2} + C . \dagger \end{aligned}$$

13. Determina f(x) sabiendo que f'''(x) = 24x; f''(0) = 2, f'(0) = 1 y f(0) = 0.

(Junio 2005)

Solución:

f''(x) será una primitiva de f'''(x) = 24x. Por tanto f''(x) = 12x² + C. Como f''(0) = 2 \Rightarrow f''(0) = 12·0² + C = 2 \Rightarrow C = 2, con lo que f''(x) = 12x² + 2. Una primitiva de esta última es 4x³ + 2x + C y entonces f'(x) = 4x³ + 2x + C. Pero f'(0) = 1 \Rightarrow C = 1 y f'(x) = 4x³ + 2x + 1. Finalmente f(x) será una primitiva de f'(x) \Rightarrow f(x) = x⁴ + x² + x + C, y como f(0) = 0 \Rightarrow C = 0 y f(x) = x⁴ + x² + x . †

14. Calcula la primitiva de $\int \frac{x + \sqrt{x}}{x^2} dx$.

(Septiembre 2005)

Solución:

$$\int \frac{x + \sqrt{x}}{x^2} dx = \int \frac{x}{x^2} dx + \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int x^{-\frac{3}{2}} dx = \ln|x| + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + C = \ln|x| - \frac{2\sqrt{x}}{x} + C.$$

15. Calcula la integral indefinida $\int \frac{x+2}{x^3-2x+1} dx$

(Junio 2006)

Solución:

$$\frac{x+2}{x^3-2x+1} = \frac{x+2}{(x-1)\left(x+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}} + \frac{C}{x-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{A\left(x+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right) + B(x-1)\left(x-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right) + C(x-1)\left(x+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)}{(x-1)\left(x+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{Ax^2 + Ax - A + Bx^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right)Bx + \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right)B + Cx^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right)Cx - \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right)C}{(x-1)\left(x+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2 + \left(A - \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right)B + \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right)C\right)x + \left(-A + \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right)B - \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right)C\right)}{(x-1)\left(x+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B + C = 0 \\ A - \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right)B + \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right)C = 1 \\ -A + \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right)B - \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right)C = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = \frac{7\sqrt{5}}{10} - \frac{3}{2} \\ C = -\frac{7\sqrt{5}}{10} - \frac{3}{2} \end{cases}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x^3-2x+1} dx &= 3 \int \frac{1}{x-1} dx + \left(\frac{7\sqrt{5}}{10} - \frac{3}{2}\right) \int \frac{1}{x + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}} dx + \left(-\frac{7\sqrt{5}}{10} - \frac{3}{2}\right) \int \frac{1}{x + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}} dx = \\ &= 3 \ln|x-1| + \left(\frac{7\sqrt{5}}{10} - \frac{3}{2}\right) \ln \left|x + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right| + \left(-\frac{7\sqrt{5}}{10} - \frac{3}{2}\right) \ln \left|x + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right| + C. \dagger \end{aligned}$$

16. Calcula la siguiente integral: $\int \frac{x^3+1}{x^2+4} dx$

(Septiembre 2006)

Solución:

Efectuando la división se tiene: $x^3 + 1 = (x^2 + 4)x + (-4x + 1)$. Dividiendo ambos

miembros entre $x^2 + 4$: $\frac{x^3+1}{x^2+4} = x + \frac{-4x+1}{x^2+4}$.

Por tanto $\int \frac{x^3+1}{x^2+4} dx = \int x dx + \int \frac{-4x+1}{x^2+4} dx = \int x dx + \int \frac{-4x}{x^2+4} dx + \int \frac{1}{x^2+4} dx =$

$$= \int x dx - 2 \int \frac{2x}{x^2+4} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} dx = \frac{x^2}{2} - 2 \ln|x^2+4| + \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{x}{2}\right) + C. \dagger$$

17. Calcula la siguiente integral: $\int \frac{2}{1+\sqrt{x}} dx$

(Indicación: Puede ayudarte realizar un cambio de variable adecuado.)

(Junio 2007)

Solución:

Llamemos $1+\sqrt{x} = t$. Entonces $\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt \Rightarrow dx = 2\sqrt{x} dt \Rightarrow dx = 2(t-1) dt$.

Sustituyendo:

$$\int \frac{2}{1+\sqrt{x}} dx = \int \frac{2}{t} 2(t-1) dt = 4 \int \frac{t-1}{t} dt = 4 \int \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt = 4(t - \ln|t|) + C =$$

$$4(1+\sqrt{x} - \ln|1+\sqrt{x}|) + C = 4\sqrt{x} - 4\ln|1+\sqrt{x}| + C', \text{ donde se ha llamado } C' = 4 + C. \dagger$$

18. Calcula la siguiente integral: $\int \frac{x}{(x+1)^3} dx$

(Septiembre 2007)

Solución:

$$\frac{x}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} = \frac{A(x+1)^2 + B(x+1) + C}{(x+1)^3} =$$

$$= \frac{Ax^2 + (2A+B)x + (A+B+C)}{(x+1)^3} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ 2A+B=1 \\ A+B+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=1 \\ C=-1 \end{cases}$$

Entonces $\frac{x}{(x+1)^3} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}$, y por tanto:

$$\int \frac{x}{(x+1)^3} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2} dx - \int \frac{1}{(x+1)^3} dx = \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + C = -\frac{2x+1}{2(x+1)^2} + C. \dagger$$

19. Calcula la integral $\int \frac{2x^3 - 9x^2 + 9x + 6}{x^2 - 5x + 6} dx$

(Junio 2008)

Solución:

Efectuando la división se tiene $2x^3 - 9x^2 + 9x + 6 = (x^2 - 5x + 6)(2x + 1) + 2x$.

Dividiendo los dos miembros entre $x^2 - 5x + 6$ tenemos:

$$\frac{2x^3 - 9x^2 + 9x + 6}{x^2 - 5x + 6} = 2x + 1 + \frac{2x}{x^2 - 5x + 6}.$$

Además: $\frac{2x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{2x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x-2)}{(x-2)(x-3)} =$

$$= \frac{(A+B)x + (-3A-2B)}{(x-2)(x-3)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ -3A-2B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-4 \\ B=6 \end{cases} .$$

$$\text{Entonces } \frac{2x^3 - 9x^2 + 9x + 6}{x^2 - 5x + 6} = 2x + 1 + \frac{2x}{x^2 - 5x + 6} = 2x + 1 + \frac{-4}{x-2} + \frac{6}{x-3} .$$

$$\text{Por tanto } \int \frac{2x^3 - 9x^2 + 9x + 6}{x^2 - 5x + 6} dx = \int (2x + 1) dx - 4 \int \frac{1}{x-2} dx + 6 \int \frac{1}{x-3} dx =$$
$$x^2 + x - 4 \ln|x-2| + 6 \ln|x-3| + C . \dagger$$