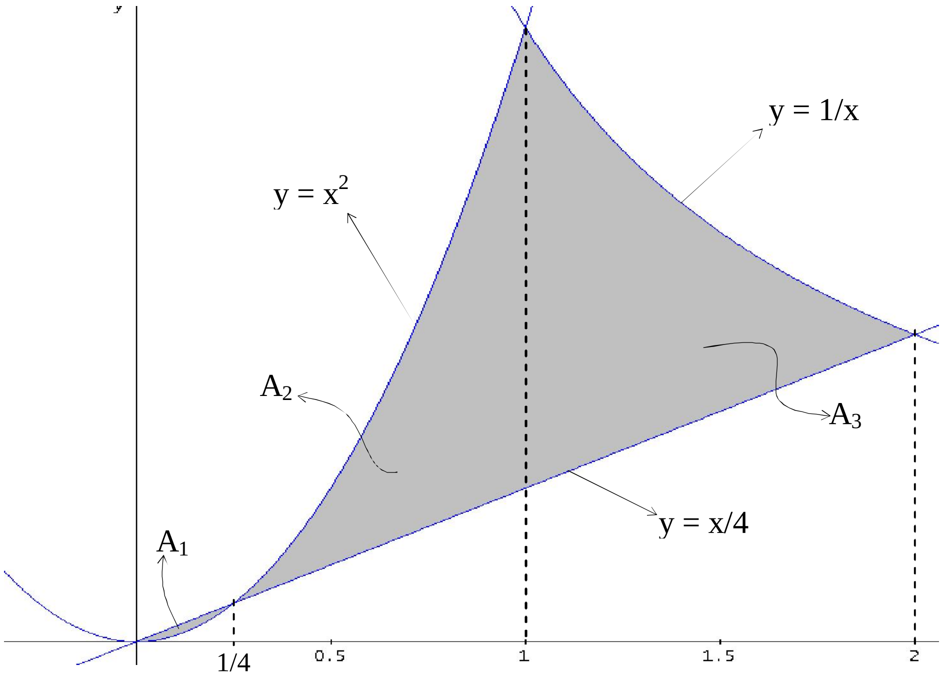
## Integrales definidas. Aplicaciones

1. Dibujar el recinto limitado por $y = x^2$; $y = \dfrac{1}{x}$; $y = \dfrac{x}{4}$. Calcular su área.

*(Junio 1997)*

***Solución:***




Observando el dibujo se tiene que el área del recinto limitado por las gráficas de las tres curvas es $A = A_1 + A_2 + A_3$.

$A_1 = \int_a^b \left(\dfrac{x}{4} - x^2\right)dx$ donde a y b son las soluciones de la ecuación $x^2 = \dfrac{x}{4} \Leftrightarrow 4x^2 = x$ $\Leftrightarrow 4x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(4x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = \dfrac{1}{4}$. Entonces:

$$A_1 = \int_0^{1/4}\left(\frac{x}{4} - x^2\right)dx = \left[\frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{1/4} = \left(\frac{(1/4)^2}{8} - \frac{(1/4)^3}{3}\right) - \left(\frac{0^2}{8} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{1}{128} - \frac{1}{192} = \frac{1}{384}$$

$$A_2 = \int_{1/4}^{1}\left(x^2 - \frac{x}{4}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{8}\right]_{1/4}^{1} = \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{8}\right) - \left(\frac{(1/4)^3}{3} - \frac{(1/4)^2}{8}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{192} - \frac{1}{128}\right) = \frac{5}{24} - \left(-\frac{1}{384}\right) = \frac{27}{128}$$

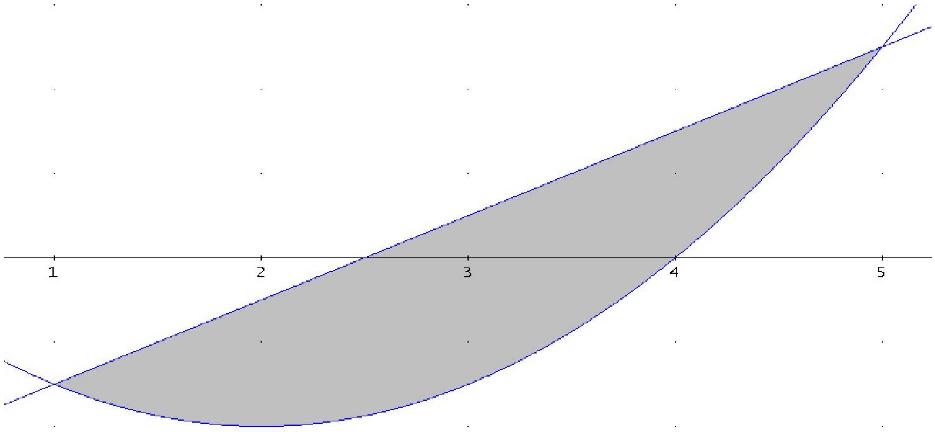
$$A_3 = \int_1^2\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{4}\right)dx = \left[\ln|x| - \frac{x^2}{8}\right]_1^2 = \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) - \left(\ln 1 - \frac{1}{8}\right) = \ln 2 - \frac{3}{8}$$

Por tanto: $A = A_1 + A_2 + A_3 = \dfrac{1}{384} + \dfrac{27}{128} + \ln 2 - \dfrac{3}{8} = \ln 2 - \dfrac{31}{192} \cong 0{,}53\ u^2$

2. Dibujar el recinto limitado por $y = x^2 - 4x$ ; $y = 2x - 5$. Calcular su área.

*(Septiembre 1997)*

***Solución:***




Llamemos $f(x) = x^2 - 4x$ y $g(x) = 2x - 5$. Entonces:

$(f - g)(x) = \left(x^2 - 4x\right) - \left(2x - 5\right) = x^2 - 6x + 5$. Igualamos a cero y obtenemos los límites de integración (ver dibujo): $x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ , $x = 5$

$$\int_1^5 \left(x^2 - 6x + 5\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x\right]_1^5 = \left(\frac{125}{3} - 50\right) - \left(\frac{1}{3} + 2\right) = \frac{124}{3} - 52 = -\frac{32}{3}$$

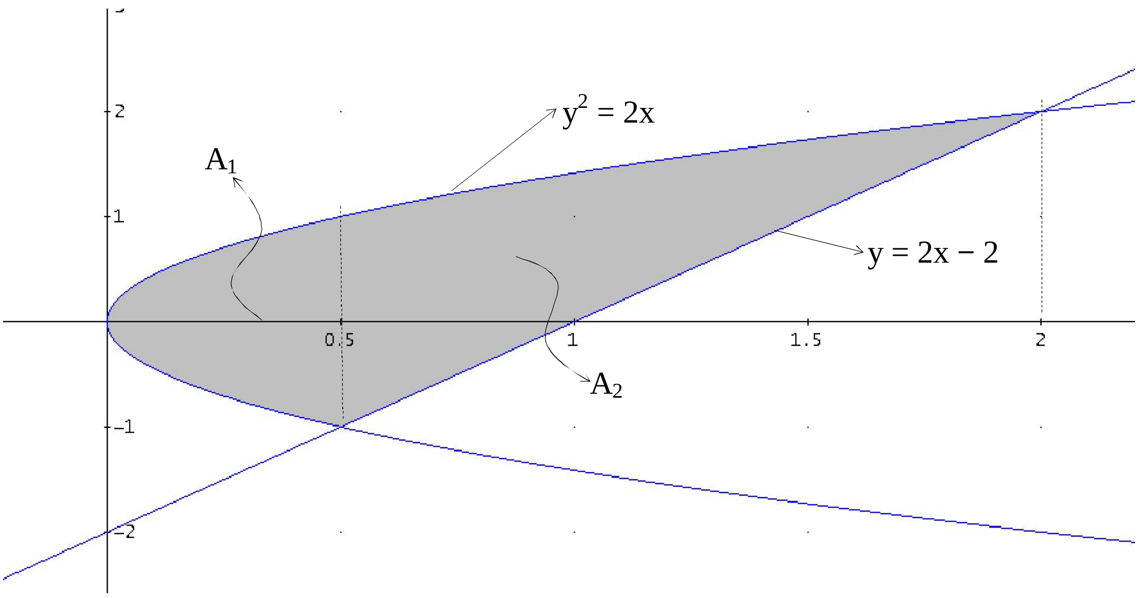
Por tanto, el área del recinto limitado por las gráficas de las dos funciones es:

$$A = \left|\int_1^5 \left(x^2 - 6x + 5\right) dx\right| = \left|-\frac{32}{3}\right| = \frac{32}{3} \cong 10,67\ u^2$$

3. Dibujar el recinto limitado por las gráficas de $y^2 = 2x$, $2x - y - 2 = 0$. Calcular su área.

*(Junio 1998)*

***Solución:***



$y^2 = 2x \Rightarrow y = \sqrt{2x}$. Entonces (ver dibujo):

$$A_1 = 2\int_0^{1/2} \sqrt{2x}\,dx = 2\int_0^{1/2} (2x)^{1/2}\,dx = 2\sqrt{2}\int_0^{1/2} (x)^{1/2}\,dx = \left[2\sqrt{2}\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^{1/2} =$$

$$= \left[\frac{4}{3}x\sqrt{2x}\right]_0^{1/2} = \frac{4}{3}\frac{1}{2}\sqrt{2\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$A_2 = \int_{1/2}^{2} \left(\sqrt{2x} - (2x-2)\right)dx = \int_{1/2}^{2} \left(\sqrt{2x} - 2x + 2\right)dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{2x} - x^2 + 2x\right]_{1/2}^{2} =$$

$$\left(\frac{2}{3}2\sqrt{4} - 4 + 4\right) - \left(\frac{2}{3}\frac{1}{2}\sqrt{2\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3} - \frac{13}{12} = \frac{19}{12}$$

Por tanto el área del recinto limitado por las gráficas de las dos funciones es:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{2}{3} + \frac{19}{12} = \frac{9}{4} = 2,25\ u^2$$

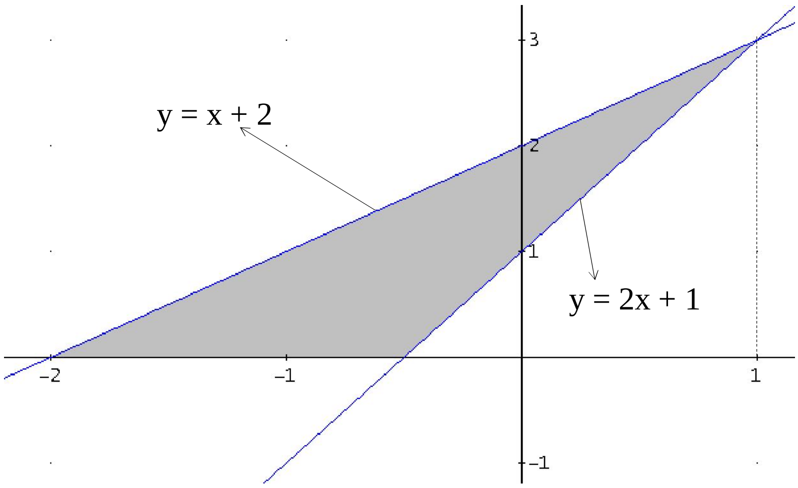
4. Hallar la ecuación de la recta tangente a $y = x^2 + 2$, en el punto de abscisa x = 1. Calcular el área del recinto limitado por y = x + 2, la tangente anterior y el eje OX.

*(Septiembre 1998)*

***Solución:***

La ecuación de la recta tangente es $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 3 = 2(x - 1) \Rightarrow$ $\Rightarrow y = 2x + 1$

Las dos rectas se cortan en el punto, cuya coordenada x, es la solución de la ecuación $2x + 1 = x + 2 \Rightarrow x = 1$




Por tanto el área del recinto es (ver dibujo):

$$A = \int_{-2}^{1} \left((x+2) - (2x+1)\right)dx = \int_{-2}^{1} (-x+1)\,dx = \left[-\frac{x^2}{2} + x\right]_{-2}^{1} = \left(\frac{-1}{2} + 1\right) - (-2-2) =$$

$$= \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2} = 4,5\ u^2$$

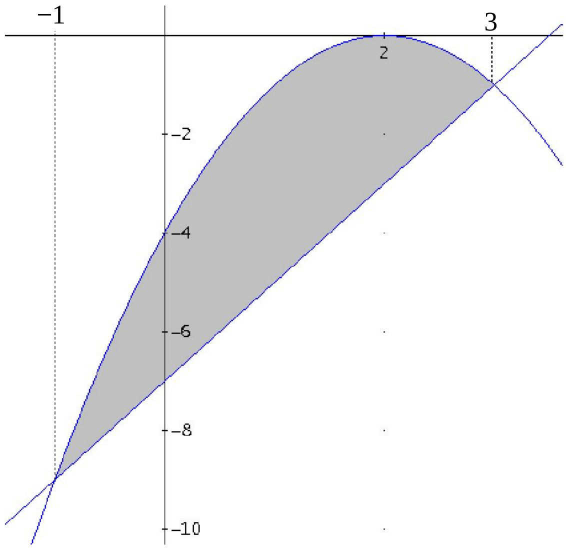
5. Calcular el área de la región del plano limitada por las gráficas de las funciones: $y = -x^2 + 4x - 4$ e $y = 2x - 7$.

*(Junio 1999)*

***Solución:***

Los límites de integración son las soluciones de la ecuación $-x^2 + 4x - 4 = 2x - 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ , $x = 3$




Por tanto el área pedida es:

$$A = \int_{-1}^{3} \left( \left( -x^2 + 4x - 4 \right) - \left( 2x - 7 \right) \right) dx = \int_{-1}^{3} \left( -x^2 + 2x + 3 \right) dx = \left[ \frac{-x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^{3} =$$

$$= (-9 + 9 + 9) - \left( \frac{1}{3} + 1 - 3 \right) = 9 - \left( -\frac{5}{3} \right) = \frac{32}{3} \cong 10,67 \text{ u}^2$$

6. Halla el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $y = x^2 - 2x$ e $y = -x^2 + 4x$.

*(Septiembre 1999)*

***Solución:***

7. Calcular el área del recinto limitado por las curvas $y = x^2 - 1$, $y = 11 - x$ y el eje OX. Dibujar el recinto.

*(Junio 2000)*

***Solución:***

8. Hallar el área del recinto plano delimitado por las curvas de ecuación $y = x^2 - 2$ e $y = -|x|$. Dibujar el recinto.

*(Septiembre 2000)*

***Solución:***

9. Dada la parábola $y = \frac{x^2}{4}$ y la recta $y = x$

a) Dibuja las gráficas de la parábola y de la recta.

b) Señala el recinto plano comprendido entre las dos gráficas anteriores.

c) Calcula el área del recinto plano señalado.

*(Junio 2001)*

***Solución:***

10. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$ en el punto de abscisa x = 1. Calcula el área del recinto limitado por la recta tangente y la curva dada.

*(Junio 2002)*

***Solución:***

11. Dadas las funciones $y = -x^2 + 4$ e $y = |x+2|$:

a) Dibuja ambas gráficas.

b) Señala el recinto plano comprendido entre las dos gráficas anteriores.

c) Calcula el área del recinto plano señalado.

*(Septiembre 2002)*

***Solución:***

12. Dada la curva $y = x^2 - 4x$ y la recta $y = 3x - 6$:

a) Dibuja la gráfica de ambas.

b) Señala el recinto plano comprendido entre ellas.

c) Calcula el área del recinto señalado.

*(Junio 2003)*

***Solución:***

13. La curva $y = 2x^2$ divide al cuadrado de vértices A(0, 0), B(1, 0), C(1, 1) y D(0, 1) en dos recintos.

a) Dibuja dichos recintos.

b) Halla el área de cada uno de ellos.

*(Junio 2004)*

***Solución:***

14. Considera la función $f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x<1 \\ -x^2+2x & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$

a)Haz un dibujo aproximado de su gráfica.

b) Calcula el área encerrada por la gráfica y el eje X.

*(Septiembre 2004)*

***Solución:***

15. Dadas las funciones $f(x)=x^2-1$ y $g(x)=1-x$: a) Esboza el recinto encerrado entre sus gráficas. b) Calcula el área de dicho recinto.

*(Junio 2006)*

***Solución:***

16. Dibuja aproximadamente las gráficas de las funciones $f(x)=x^2-3$ y $g(x)=2x$, y sombrea el área que queda encerrada entre ellas. Calcula el valor de dicho área.

*(Septiembre 2006)*

***Solución:***

17. Dadas las funciones $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=-x+\frac{5}{2}$, se pide: a) Esboza sus gráficas y sombrea el recinto encerrado entre ellas. b) Calcula el área de dicho recinto.

*(Junio 2007)*

***Solución:***

18. Esboza las gráficas de las parábolas $f(x)=2x^2$ y $g(x)=-x^2+3$, sombreando el recinto cerrado que determinan. Calcula el área de dicho recinto.

*(Septiembre 2007)*

***Solución:***

19. Calcula la integral definida $\int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} x \, dx$

*(Junio 2008)*

***Solución:***

20. De la función $f(x) = (x+a)\operatorname{sen} x$, donde a es un número real, se sabe que la integral definida $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$ es tres veces el valor de la pendiente de la recta tangente a f(x) en x = 0. Calcula el valor de a.

*(Septiembre 2008)*

***Solución:***

21. Definición de primitiva de una función. Sabiendo que $F(x) = e^{x^2}$ es una primitiva de la función f(x):

a) Comprueba que f(x) es una función creciente en ¡ .

b) Calcula el área determinada por la gráfica de f(x), el eje de abscisas, y las rectas x = −1 y x = 1.

*(Septiembre 2008)*

***Solución:***