

Límites. Regla de L'Hôpital

1. Calcular $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x - 8}{\sec x + 10}$.

septiembre 1999

Solución

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x - 8}{\sec x + 10}$ da lugar a una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Llamemos $f(x) = \operatorname{tg} x - 8$ y $g(x) = \sec x + 10 = \frac{1}{\cos x} + 10$. Entonces f y g son derivables en su dominio de definición (en particular en $\frac{\pi}{2}$ y en un entorno suyo):

$$f'(x) = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ y } g'(x) = \frac{-1}{\cos^2 x} \cdot (-\operatorname{sen} x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}.$$

$$\text{De este modo, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{sen} x} = 1.$$

Al ser f y g son derivables en un entorno de $\frac{\pi}{2}$ podemos aplicar la regla de L'Hôpital y se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x - 8}{\sec x + 10} = 1 \quad \dagger$$

2. Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$.

septiembre 2000

Solución

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$ es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Llamemos $f(x) = x - \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x$. Entonces

f y g son derivables en su dominio de definición (en particular en 0 y en un entorno suyo):

$$f'(x) = 1 - \cos x \text{ y } g'(x) = \sec^2 x - \cos x = \frac{1}{\cos^2 x} - \cos x = \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x}.$$

$$\text{Por tanto } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x (1 - \cos x)}{1 - \cos^3 x} \quad (1), \text{ que vuelve a ser una indeterminación del tipo } \frac{0}{0}.$$

Llamemos $\cos x = z$. Entonces $1 - \cos^3 x = 1 - z^3$.

Pero, aplicando la regla de Ruffini, $1 - z^3 = -z^3 + 1 = (z - 1)(-z^2 - z - 1) = (1 - z)(z^2 + z + 1)$.

Por tanto, se tiene que $1 - \cos^3 x = (1 - \cos x)(\cos^2 x + \cos x + 1)$.

Luego la expresión (1) es igual a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x (1 - \cos x)}{(1 - \cos x)(\cos^2 x + \cos x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \cos x + 1} = \frac{1}{3}$.

Como f y g son derivables en un entorno de 0 podemos aplicar la regla de L'Hôpital y se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{3} = \frac{1}{3}$$

Otra forma de hacerlo consiste en aplicar otra vez la regla de L'Hôpital, ya que la derivada de $f(x)$, $f'(x) = \cos^2 x (1 - \cos x) = \cos^2 x - \cos^3 x$, y la derivada de $g(x)$, $g'(x) = 1 - \cos^3 x$, vuelven a ser derivables en un entorno de 0:

$$f''(x) = 2 \cos x (-\operatorname{sen} x) - 3 \cos^2 x (-\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x (3 \cos^2 x - 2 \cos x).$$

$$g''(x) = -3 \cos^2 x (-\operatorname{sen} x) = 3 \operatorname{sen} x \cos^2 x.$$

Entonces $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x (3 \cos^2 x - 2 \cos x)}{3 \operatorname{sen} x \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos^2 x - 2 \cos x}{3 \cos^2 x} = \frac{3 - 2}{3} = \frac{1}{3}$, con lo que nuevamente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{3} = \frac{1}{3} \quad \dagger$$

3. Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5}{\ln(1+x)} - \frac{5}{x} \right)$.

reserva 2 – 2000

Solución

Tenemos que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{\ln(1+x)} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 0^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 0^+ \end{cases}$, y también que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{x} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 0^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 0^+ \end{cases}$.

En todo caso $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5}{\ln(1+x)} - \frac{5}{x} \right)$ es una indeterminación del tipo $\infty - \infty$.

Operando: $\frac{5}{\ln(1+x)} - \frac{5}{x} = \frac{5x - 5 \ln(1+x)}{x \ln(1+x)}$, con lo que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5}{\ln(1+x)} - \frac{5}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x - 5 \ln(1+x)}{x \ln(1+x)}$, que ahora es

una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Haremos uso, como en los ejercicios anteriores, de la regla de L'Hôpital, pues tanto el numerador como el denominador son funciones continuas y derivables en todo su dominio de definición que, por cierto, es el intervalo $(-1, +\infty)$.

Llamando $f(x) = 5x - 5 \ln(1+x)$ y $g(x) = x \ln(1+x)$ tenemos:

$$f'(x) = 5 - \frac{5}{\ln(1+x)}, \quad g'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

De nuevo tenemos que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 - \frac{5}{\ln(1+x)}}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}}$ vuelve a presentar una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, pero

tanto f' como g' son funciones continuas y derivables en un entorno de cero, con lo que podemos aplicar de nuevo la regla de L'Hôpital.

$$f''(x) = \frac{5}{\ln^2(1+x)} \cdot \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{5}{\ln^3(1+x)}.$$

$$g''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1(1+x) - x}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1+x+1}{(1+x)^2} = \frac{2+x}{(1+x)^2}.$$

Ahora tenemos: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{\ln^3(1+x)}}{\frac{2+x}{(1+x)^2}} = \frac{5}{2}.$

Usando la regla de L'Hôpital $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5}{\ln(1+x)} - \frac{5}{x} \right) = \frac{5}{2}.$ †

4. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}.$

junio 2001

Solución

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}$ es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Procediendo como en los ejercicios anteriores, aplicamos la regla de

L'Hôpital, pues tanto $f(x) = 1 - \cos x$ como $g(x) = (e^x - 1)^2$ son funciones derivables en todo \mathbb{R} :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(-\operatorname{sen} x)}{2(e^x - 1)e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2(e^{2x} - e^x)}, \text{ que vuelve a ser una indeterminación del tipo } \frac{0}{0}.$$

Aplicamos pues la regla de L'Hôpital a $f'(x)$ y a $g'(x)$, que son también derivables en todo \mathbb{R} :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2(2e^{2x} - e^x)} = \frac{1}{2(2-1)} = \frac{1}{2}. \text{ Por tanto:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2} = \frac{1}{2} \quad \dagger$$

5. Enuncia la regla de L'Hôpital y calcula el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(x - \ln(1+x))}{x \ln(1+x)}$.

septiembre 2001

Solución

Regla de L'Hôpital

Si f y g son funciones continuas y derivables en un intervalo abierto que contiene a un punto x_0 , verificando:

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

b) $g'(x) \neq 0$ en cualquier $x \neq x_0$ del intervalo.

c) Existe $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Entonces existe $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(x - \ln(1+x))}{x \ln(1+x)}$ presenta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Tanto $f(x) = 4(x - \ln(1+x))$ como $g(x) = x \ln(1+x)$ son funciones derivables en sus respectivos dominios de definición (que en ambos casos es $(-1, +\infty)$, pues el logaritmo está definido para todo $x > -1$), en particular son

derivables en un entorno de cero. Aplicando la regla de L'Hôpital tendremos que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$f'(x) = 4\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) = 4\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{4x}{1+x}, \quad g'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} = \frac{(1+x)\ln(1+x) + x}{1+x}.$$

Por tanto, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4x}{1+x}}{\frac{(1+x)\ln(1+x) + x}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{(1+x)\ln(1+x) + x}$, que vuelve a ser una indeterminación

del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicamos ahora la regla de L'Hôpital a las funciones $f'(x)$ y $g'(x)$, pues estas vuelven a ser

derivables en un entorno de cero, con lo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$.

$$f''(x) = 4, \quad g''(x) = \ln(1+x) + (1+x) \frac{1}{1+x} + 1 = \ln(1+x) + 2.$$

$$\text{Así: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{\ln(1+x) + 2} = \frac{4}{0+2} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(x - \ln(1+x))}{x \ln(1+x)} = 2. \dagger$$

6. Enuncia la regla de L'Hôpital y calcula $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 2x^2 + 1}$.

reserva 2 – 2001

Solución

El enunciado de la regla de L'Hôpital se encuentra en el ejercicio anterior.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 2x^2 + 1}$ es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando, como en casos anteriores, la regla de L'Hôpital,

tenemos: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{4x^3 - 4x}$, que vuelve a ser una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Pero $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{12x^2 - 4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, con lo que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f''(x)}{g''(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 2x^2 + 1} = \frac{3}{4}$$

Este límite también se podría haber hecho sin aplicar la regla de L'Hôpital. Bastaría simplificar la fracción algebraica.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{(x+1)^2} = \frac{3}{4} \dagger$$

7. Enuncia la regla de L'Hôpital y calcula el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos 2x - \operatorname{sen} 2x}{x^3}$.

reserva 1 – 2002

Solución

El enunciado de la regla de L'Hôpital se encuentra en el ejercicio número 5.

Claramente $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos 2x - \operatorname{sen} 2x}{x^3}$ es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Derivando numerador y denominador y

volviendo a hacer el límite en cero, tenemos: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x - 4x \operatorname{sen} 2x - 2 \cos 2x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x \operatorname{sen} 2x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \operatorname{sen} 2x}{3x}$,

que vuelve a ser una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Pero $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8 \cos 2x}{3} = -\frac{8}{3}$, con lo que, aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = -\frac{8}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos 2x - \operatorname{sen} 2x}{x^3} = -\frac{8}{3} \dagger$$

8. Enuncia la regla de L'Hôpital. Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$.

junio 2003

Solución

Puedes consultar el enunciado de la regla de L'Hôpital en el ejercicio número 5.

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$ es una indeterminación del tipo $\infty - \infty$ (ver ejercicio número 3).

Operando tenemos $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)}$, que es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Llamemos

$f(x) = x - \ln(1+x)$ y $g(x) = x \cdot \ln(1+x)$, que son funciones derivables en sus respectivos dominios de definición (en ambos casos es $(-1, +\infty)$, pues el logaritmo está definido para todo $x > 0$), y en particular son derivables en un

entorno de cero. Aplicando la regla de L'Hôpital tendremos que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}, \quad g'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} = \frac{(1+x)\ln(1+x) + x}{1+x}.$$

Por tanto, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{1+x}}{\frac{(1+x)\ln(1+x) + x}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1+x)\ln(1+x) + x}$, que vuelve a ser una indeterminación del

tipo $\frac{0}{0}$. Aplicamos ahora la regla de L'Hôpital a las funciones $f'(x)$ y $g'(x)$, pues estas vuelven a ser derivables en

un entorno de cero, con lo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$.

$$f''(x) = 1, \quad g''(x) = \ln(1+x) + (1+x) \frac{1}{1+x} + 1 = \ln(1+x) + 2.$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x) + 2} = \frac{1}{0+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(x - \ln(1+x))}{x \ln(1+x)} = \frac{1}{2} \dagger$$

9. a) Enuncia la regla de L'Hôpital.

b) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$.

reserva 2 – 2004

Solución

El enunciado de la regla de L'Hôpital se puede consultar en el ejercicio número 5.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$ es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{x^2}}{-\sin x}$ también lo es. Pero $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}}{-\cos x} = \frac{2}{-1} = -2$.

Por tanto, aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = -\frac{8}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1} = -2 \dagger$$

10. a) Enuncia la regla de L'Hôpital.

b) Resuelve el límite siguiente: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$.

junio 2005

Solución

El enunciado de la regla de L'Hôpital se encuentra en el ejercicio 5.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$ es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Tanto $f(x) = x - \operatorname{sen} x$ como $g(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x$ son funciones derivables en sus respectivos dominios de definición (f es derivable en todo \mathbb{R} y g es derivable en $\mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$), en particular son derivables en un entorno de cero. Aplicando la regla de L'Hôpital tendremos que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$f'(x) = 1 - \cos x.$$

$$g'(x) = \sec^2 x - \cos x = \frac{1}{\cos^2 x} - \cos x = \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x}.$$

Por tanto, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^3 x}{1 - \cos^3 x}$, que vuelve a ser una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Aplicaremos ahora la regla de L'Hôpital a las funciones $h(x) = \cos^2 x - \cos^3 x$ y $j(x) = 1 - \cos^3 x$, pues estas son también derivables en un entorno de cero, con lo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{j(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h'(x)}{j'(x)}$. Realizaremos pues las derivadas de las funciones h y j .

$$h'(x) = 2 \cos x (-\operatorname{sen} x) - 3 \cos^2 x (-\operatorname{sen} x) = 3 \cos^2 x \operatorname{sen} x - 2 \cos x \operatorname{sen} x.$$

$$j'(x) = -3 \cos^2 x (-\operatorname{sen} x) = 3 \cos^2 x \operatorname{sen} x.$$

Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h'(x)}{j'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos^2 x \operatorname{sen} x - 2 \cos x \operatorname{sen} x}{3 \cos^2 x \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{2}{3 \cos x} \right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^3 x}{1 - \cos^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{3}.$$

Con lo que, finalmente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x} = \frac{1}{3} \quad \dagger$$

11. Calcula los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x} ; \text{ b) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}}$$

junio 2008

Solución

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x}$ es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Tanto $f(x) = x^3 - 8x^2 + 7x$ como $g(x) = x^2 - x$ son funciones derivables en todo \mathbb{R} , en particular son derivables en un entorno de cero. Aplicando la regla de L'Hôpital tendremos que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$f'(x) = 3x^2 - 16x + 7, \quad g'(x) = 2x - 1.$$

$$\text{Por tanto, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 16x + 7}{2x - 1} = -7 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x} = -7.$$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}}$ da lugar a una indeterminación del tipo 1^∞ . Supongamos que $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}} = l$,

entonces $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln \left[\left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}} \right] = \ln l$ (el logaritmo neperiano es una función continua, por tanto, el logaritmo

del límite coincide con el límite del logaritmo).

Entonces: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln \left[\left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} \ln \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)}{\cos x}$, límite que da lugar a una

indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Las funciones $f(x) = \ln \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)$ y $g(x) = \cos x$ son derivables en todo \mathbb{R} , en

particular lo son en un entorno de $\frac{\pi}{2}$ y podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{2x}{\pi} + \cos x} \cdot \left(\frac{2}{\pi} - \sin x \right) = \frac{2 - \pi \sin x}{2x + \pi \cos x} ; \quad g'(x) = -\sin x.$$

Con lo que: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 - \pi \sin x}{-\sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 - \pi \sin x}{-\sin x (2x - \pi \cos x)} = \frac{2 - \pi}{-\left(2 \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2 - \pi}{-\pi} = 1 - \frac{2}{\pi}$.

Por tanto, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln \left[\left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}} \right] = 1 - \frac{2}{\pi}$.

De este modo, $\ln l = 1 - \frac{2}{\pi} \Rightarrow l = e^{1 - \frac{2}{\pi}}$ y entonces $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}} = e^{1 - \frac{2}{\pi}}$.

12. Calcula los siguientes límites

- a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^{\frac{1}{x-1}}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x - x \cos x}{2x^3}$

reserva 1 2011 – propuesta B

Solución

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^{\frac{1}{x-1}}$ es una indeterminación del tipo 1^∞ . Tomando logaritmos y procediendo como en el apartado b)

del ejercicio anterior tenemos: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^{\frac{1}{x-1}} = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^{\frac{1}{x-1}} = \ln l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)}{x-1} = \ln l$.

Llamemos $f(x) = \ln \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)$ y $g(x) = x-1$. Entonces:

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{2x+1}{x+2}} \cdot \frac{2(x+2) - (2x+1) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x+2}{2x+1} \cdot \frac{3}{(x+2)^2} = \frac{3}{(2x+1)(x+2)}, \quad g'(x) = 1.$$

Por tanto, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3}{(2x+1)(x+2)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^{\frac{1}{x-1}} = \frac{1}{3}$, con lo que $\ln l = \frac{1}{3} \Rightarrow l = e^{1/3}$,

es decir, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^{\frac{1}{x-1}} = e^{1/3}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x - x \cos x}{2x^3}$ es claramente una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando varias veces la regla de L'Hôpital, por un argumento varias veces repetido:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x - x \cos x}{2x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - (\cos x - x \text{sen } x)}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \text{sen } x}{6x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x + x \cos x}{12x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x - x \text{sen } x}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

13. Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que se verifique la igualdad $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{a}{x^2}}$.

reserva 2 2012 – propuesta B

Solución

En primer lugar, calcularemos el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}$, que presenta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, haciendo

uso de la regla de L'Hôpital:
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1.$$

Por tanto,
$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Procediendo como en los dos ejercicios anteriores calcularemos $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{a}{x^2}}$, que presenta una indeterminación del

tipo 1^∞ . Supongamos que $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{a}{x^2}} = l$, entonces $\lim_{x \rightarrow 0} \ln (\cos x)^{\frac{a}{x^2}} = \ln l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \ln (\cos x)}{x^2} = \ln l$.

Aplicaremos la regla de L'Hôpital para calcular el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \ln (\cos x)}{x^2}$, que es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \ln (\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a \operatorname{sen} x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a \operatorname{tg} x}{2x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a \sec^2 x}{2} = -\frac{a}{2}. \text{ Luego, } \ln l = -\frac{a}{2} \Rightarrow l = e^{-a/2} = \frac{1}{e^{a/2}}.$$

Así pues, para que sea $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{a}{x^2}}$, tendrá que ser $\frac{1}{e} = \frac{1}{e^{a/2}}$, de donde claramente $\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2$. †

14. a) Calcula para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ se verifica la igualdad $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos ax)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-2}$.

b) Calcula el límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$.

reserva 1 2013 – propuesta B

Solución

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(ax))^{\frac{1}{x^2}}$ es una indeterminación del tipo 1^∞ .

Supongamos que $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(ax))^{\frac{1}{x^2}} = l$, entonces $\lim_{x \rightarrow 0} \ln (\cos(ax))^{\frac{1}{x^2}} = \ln l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (\cos(ax))}{x^2} = \ln l$.

Aplicamos la regla de L'Hôpital para calcular el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (\cos(ax))}{x^2}$, que presenta una indeterminación del

tipo $\frac{0}{0}$:
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (\cos(ax))}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a \operatorname{sen}(ax)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a \operatorname{tg}(ax)}{2x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a^2 \sec^2(ax)}{2} = -\frac{a^2}{2}.$$

Por tanto, $\ln l = -\frac{a^2}{2} \Rightarrow l = e^{-a^2/2} \Rightarrow l = \frac{1}{e^{a^2/2}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(ax))^{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{e^{a^2/2}}$.

Como $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos ax)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-2}$, entonces $\frac{1}{e^{a^2/2}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \Rightarrow \frac{a^2}{2} = 2 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 2 \end{cases}$. †

b) En el límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$ se presenta una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Para resolverla, en primer lugar, vamos a multiplicar y a dividir por el conjugado de la expresión $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}((x+1) - (x-1))}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}. \quad (1)$$

El límite anterior es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. La regla de L'Hôpital también resuelve este tipo de límites:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x}(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2+x}} = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1. \quad (2) \end{aligned}$$

En el último paso se ha hecho uso de que, si en una función racional aparece la indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, y el grado del numerador es igual que el grado del denominador, entonces el límite es igual al cociente de los coeficientes líderes de los polinomios del numerador y del denominador. La función raíz cuadrada de un polinomio se puede considerar a su vez polinómica. Bastará elevar el polinomio del radicando a $\frac{1}{2}$. Como se puede observar en (2), el polinomio de arriba es de grado uno y el de abajo también. Pero esta misma técnica ya se podía haber aplicado en (1), donde los grados son ambos igual a $\frac{1}{2}$ y tendríamos el mismo resultado. Si se ha aplicado la regla de L'Hôpital ha sido para mostrar que también funciona si nos encontramos con la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. †

15. Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{xe^{\operatorname{sen} x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x + \operatorname{sen} x}}$$

septiembre 2015 – propuesta A

Solución

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{xe^{\operatorname{sen} x}}$ es claramente una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{xe^{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+2x}}{e^{\operatorname{sen} x} + x \cos x e^{\operatorname{sen} x}} = \frac{2}{1+0} = 2 \quad †$$

$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x + \operatorname{sen} x}}$ es una indeterminación del tipo 1^∞ . Para resolverla seguiremos el mismo procedimiento visto en ejercicios anteriores.

Llamemos $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x + \operatorname{sen} x}} = l$. Entonces $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x + \operatorname{sen} x}} = \ln l$, y de aquí $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{tg} x)}{x + \operatorname{sen} x} = \ln l$. El límite

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{tg} x)}{x + \operatorname{sen} x}$ presenta ahora una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. La resolveremos aplicando la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{tg} x)}{x + \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sec^2 x}{1 + \operatorname{tg} x}}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x (1 + \operatorname{tg} x)}}{1 + \cos x} = \frac{1(1+0)}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Por tanto, $\ln l = \frac{1}{2} \Rightarrow l = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$, es decir, $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x + \operatorname{sen} x}} = \sqrt{e}$. †