Determinantes

1. Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, calcula el valor de los siguientes determinantes:

   a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ \frac{x}{3} & \frac{y}{3} & \frac{z}{3} \end{vmatrix}$

junio 2002

Solución

Utilicemos las propiedades de los determinantes para transformar el determinante en otro que dependa del determinante conocido:

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = -\left(-\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}$. En estos dos pasos hemos permutado la fila 1 por la fila 3 (el determinante cambia de signo), y la fila 2 por la fila 3 (el determinante vuelve a cambiar de signo).

$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}$. Aquí se ha utilizado que si multiplicamos por el mismo número todos los elementos de una misma línea (fila o columna) el determinante queda multiplicado por ese número (obsérvese que todos los elementos de la primera fila están multiplicados por 3).

Por tanto, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 = 15$.

b) $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ \frac{x}{3} & \frac{y}{3} & \frac{z}{3} \end{vmatrix} = 5 \cdot \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{5}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ x & y & z \end{vmatrix}$ (obsérvese que la primera fila está multiplicada por 5 y la tercera por 1/3).

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}$. El primer determinante se puede poner como suma de otros dos que tienen la primera y tercera filas iguales (comunes) y en la segunda fila cada uno de los sumandos de la segunda fila del primer determinante. Además, el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix}$ es 0 porque la segunda fila es el doble que la primera (recuérdese que una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas proporcionales, su determinante es cero).

Por tanto, $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ \frac{x}{3} & \frac{y}{3} & \frac{z}{3} \end{vmatrix} = \frac{5}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{5}{3}\cdot 5 = \frac{25}{3}$. †

---

2. Utiliza las propiedades de los determinantes para desarrollar el siguiente:

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix}$$

Enuncia las propiedades que has utilizado.

junio 2003

Solución

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 2x & 3x+2 \\ x & 2x & 3x+4 \\ x & 2x & 3x+6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 3x+2 \\ x & 3 & 3x+4 \\ x & 5 & 3x+6 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} x & 2x & 3x \\ x & 2x & 3x \\ x & 2x & 3x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 2x & 2 \\ x & 2x & 4 \\ x & 2x & 6 \end{vmatrix} \right) + \left(\begin{vmatrix} x & 1 & 3x \\ x & 3 & 3x \\ x & 5 & 3x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 3 & 4 \\ x & 5 & 6 \end{vmatrix} \right) \quad \textbf{(*)}$$

Hasta aquí se ha utilizado la siguiente propiedad (descomposición de un determinante en suma de otros dos):

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ (esta descomposición es válida cualesquiera que sean la fila o la columna en la que se hallen los sumandos).

Analicemos ahora cada uno de los determinantes que aparecen en **(*)**:

$\begin{vmatrix} x & 2x & 3x \\ x & 2x & 3x \\ x & 2x & 3x \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} x & 2x & 2 \\ x & 2x & 4 \\ x & 2x & 6 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} x & 1 & 3x \\ x & 3 & 3x \\ x & 5 & 3x \end{vmatrix} = 0$, porque los tres tienen columnas son proporcionales.

$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 3 & 4 \\ x & 5 & 6 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = x\cdot 0 = 0$. En la primera igualdad se ha utilizado que si multiplicamos por el mismo número todos los elementos de una misma línea (en este caso la primera columna), el determinante queda multiplicado por ese número. En la segunda igualdad se ha utilizado la propiedad según la cual, si una línea es combinación lineal de las demás paralelas, entonces su determinante es cero (en este caso la tercera columna es suma de las dos primeras).

Por tanto, $\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix} = 0$. †

---

3. Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tiene su determinante igual a n, averigua, utilizando las propiedades de los determinantes, el valor del determinante de las matrices siguientes:

$$B = \begin{pmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{pmatrix}$$

junio 2005

Solución:

$|B| = \begin{vmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9a & 6b & 3c \\ 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \end{vmatrix} =$ [intercambiando la primera y tercera filas y luego la segunda y tercera filas hay dos cambios de signo $\Rightarrow$ el determinante que resulta tiene el mismo signo que el primero] $= 3\cdot 2\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$ [la primera columna está multiplicada por 3 y la segunda columna está multiplicada por 2] $= 6\cdot 3\cdot 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 36n$ [la primera fila está multiplicada por 3 y la segunda fila está multiplicada por 2; además el determinante que queda es, según el enunciado, igual a n].

$$|C| = \begin{vmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e & f+e \\ a & b & c+b \\ g & h & i+h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & e & f+e \\ c & b & c+b \\ i & h & i+h \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & e & e \\ a & b & b \\ g & h & h \end{vmatrix} \right) + \left(\begin{vmatrix} f & e & f \\ c & b & c \\ i & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & e & e \\ c & b & b \\ i & h & h \end{vmatrix} \right) \quad \textbf{(*)}$$

En este paso hemos escrito los determinantes como suma de otros dos, usando la siguiente propiedad:

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ (descomposición válida cualesquiera que sean la fila o la columna en la que se hallen los sumandos).

Estudiemos ahora cada uno de los cuatro determinantes de **(*)**:

$\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -n$ (intercambiando la primera y segunda filas). $\begin{vmatrix} d & e & e \\ a & b & b \\ g & h & h \end{vmatrix} = 0$ (la segunda y tercera columnas son iguales). $\begin{vmatrix} f & e & f \\ c & b & c \\ i & h & i \end{vmatrix} = 0$ (la primera y tercera columnas son iguales). $\begin{vmatrix} f & e & e \\ c & b & b \\ i & h & h \end{vmatrix} = 0$ (la segunda y tercera columnas son iguales).

Por tanto, $|C| = \begin{vmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{vmatrix} = -n$. †

---

4. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = x$, y que $\begin{vmatrix} 3b & 6c & 6a \\ e & 2f & 2d \\ 5h & 10i & 10g \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a+2b & b-c & 7c \\ d+2e & e-f & 7f \\ g+2h & h-i & 7i \end{vmatrix} = 50x+6$, halla el valor de x.

   (Nota: expresa los determinantes de la segunda igualdad en función de x).

septiembre 2006

Solución:

Por un lado tenemos que: $\begin{vmatrix} 3b & 6c & 6a \\ e & 2f & 2d \\ 5h & 10i & 10g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6a & 3b & 6c \\ 2d & e & 2f \\ 10g & 5h & 10i \end{vmatrix} =$ [intercambiando la primera y tercera columnas y luego la segunda y tercera columnas hay dos cambios de signo $\Rightarrow$ el determinante que resulta tiene el mismo signo que el primero] $= 4\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ d & e & f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix} =$ [la primera y tercera columnas están ambas multiplicadas por 2] $= 4\cdot 3\cdot 5\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 60x$ [la primera fila está multiplicada por 3 y la tercera fila está multiplicada por 5; además el determinante que queda es, según el enunciado, igual a x].

Por otro lado: $\begin{vmatrix} a+2b & b-c & 7c \\ d+2e & e-f & 7f \\ g+2h & h-i & 7i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b-c & 7c \\ d & e-f & 7f \\ g & h-i & 7i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & b-c & 7c \\ 2e & e-f & 7f \\ 2h & h-i & 7i \end{vmatrix} =$

$$=\left(\begin{vmatrix} a & b & 7c \\ d & e & 7f \\ g & h & 7i \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a & c & 7c \\ d & f & 7f \\ g & i & 7i \end{vmatrix}\right)+\left(\begin{vmatrix} 2b & b & 7c \\ 2e & e & 7f \\ 2h & h & 7i \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 2b & c & 7c \\ 2e & f & 7f \\ 2h & i & 7i \end{vmatrix}\right)$$ [descomposición de un determinante en suma de otros dos (véanse los ejercicios 2 y 3)].

Pero $\begin{vmatrix} a & b & 7c \\ d & e & 7f \\ g & h & 7i \end{vmatrix}=7\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=7x$. Además, $\begin{vmatrix} a & c & 7c \\ d & f & 7f \\ g & i & 7i \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} 2b & b & 7c \\ 2e & e & 7f \\ 2h & h & 7i \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} 2b & c & 7c \\ 2e & f & 7f \\ 2h & i & 7i \end{vmatrix}=0$ (los tres determinantes tienen columnas proporcionales).

Entonces: $\begin{vmatrix} a+2b & b-c & 7c \\ d+2e & e-f & 7f \\ g+2h & h-i & 7i \end{vmatrix}=7x$.

Por tanto, $\begin{vmatrix} 3b & 6c & 6a \\ e & 2f & 2d \\ 5h & 10i & 10g \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a+2b & b-c & 7c \\ d+2e & e-f & 7f \\ g+2h & h-i & 7i \end{vmatrix}=50x+6 \Leftrightarrow 60x+7x=50x+6 \Leftrightarrow 17x=6 \Leftrightarrow x=\frac{6}{17}$. †

---

5. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix}=6$, calcula el valor de $\begin{vmatrix} \mathrm{z}/2 & \mathrm{z}+7 & 3 \\ \mathrm{y}/2 & \mathrm{y} & 3 \\ \mathrm{x}/2 & \mathrm{x}-3 & 3 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} \mathrm{x} & -3 & 1 & 2 \\ \mathrm{y} & 0 & 1 & 2 \\ \mathrm{z} & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

septiembre 2008

Solución:

Utilizando propiedades de los determinantes que ya se han comentado en los ejercicios anteriores, tenemos:

$$\begin{vmatrix} z/2 & z+7 & 3 \\ y/2 & y & 3 \\ x/2 & x-3 & 3 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot 3\begin{vmatrix} z & z+7 & 1 \\ y & y & 1 \\ x & x-3 & 1 \end{vmatrix}=\frac{3}{2}\left(\begin{vmatrix} z & z & 1 \\ y & y & 1 \\ x & x & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} z & 7 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ x & -3 & 1 \end{vmatrix}\right)=\frac{3}{2}\left(-\begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix}\right)=\frac{3}{2}(-6)=-9.$$

Para calcular el valor del determinante $\begin{vmatrix} x & -3 & 1 & 2 \\ y & 0 & 1 & 2 \\ z & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, desarrollaremos por los elementos de la última fila:

$$\begin{vmatrix} x & -3 & 1 & 2 \\ y & 0 & 1 & 2 \\ z & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 1 & 2 \\ z & 1 & 2 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix}=6\cdot 0+2\cdot 6=12.$$ †

6. a) Calcula, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, las soluciones de la ecuación

$$\begin{vmatrix} x & x-1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ x & 0 & a & x \end{vmatrix} = 0$$

b) ¿Para qué valores de a la ecuación anterior tiene una única solución?

junio 2009

Solución

Desarrollemos el primero de los dos determinantes por la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} x & x-1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2x+2) - (-1+2x) = -4x+3$$

En el segundo determinante podemos "hacer algún cero" más, antes de desarrollar por los elementos de alguna fila o columna: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ x & 0 & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & x & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ x & 0 & a & x \end{vmatrix}$ (hemos restado a la primera columna la segunda columna).

Si ahora desarrollamos el último determinante por la segunda fila tenemos:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & x & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ x & 0 & a & x \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 1 & x & 1 \\ x & a & x \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ x & a & x \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} x & 1 \\ a & x \end{vmatrix} = -\left(x^2 - a\right) = a - x^2$$

En el segundo paso hemos restado a la primera fila la segunda y luego hemos vuelto a desarrollar el determinante, esta vez por los elementos de la primera fila.

Por tanto, la ecuación $\begin{vmatrix} x & x-1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ x & 0 & a & x \end{vmatrix} = 0$, la podemos escribir así: $-4x+3-\left(a-x^2\right)=0$. Esta es una ecuación de segundo grado: $x^2-4x+3-a=0$. Su discriminante es

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3-a) = 16 - 12 + 4a = 4 + 4a = 4(1+a)$$

Entonces la ecuación de segundo grado tendrá solución cuando $\Delta \geq 0$, es decir, cuando $a \geq -1$. En este caso las soluciones son: $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{4(1+a)}}{2} = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{1+a}}{2} = 2 \pm \sqrt{1+a}$. La solución es única cuando $1+a=0$, es decir, cuando $a=-1$. En este caso particular la solución es claramente $x=2$. †

7. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 10$, obtén el valor de los siguientes determinantes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \; ; \; \text{b) } \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ y & x & z \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \; ; \; \text{c) } \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

reserva 2, 2010 – propuesta B

Solución

a) Usando la propiedad de los determinantes según la cual, si en un determinante multiplicamos una fila o columna por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número, tenemos:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\cdot 2\cdot 5\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{10}{3}\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

De donde, por ser $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 10$, debe cumplirse necesariamente que $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$.

b) Usando la propiedad de los determinantes según la cual, si en un determinante intercambiamos entre sí dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo, tenemos:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} y & x & z \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -\left(-\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ y & x & z \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ y & x & z \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

Y como $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 10$, entonces $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ y & x & z \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 10$.

c) En este apartado usaremos la propiedad de los determinantes según la cual, si los elementos de una fila o columna se descomponen en dos sumandos, el determinante es igual a la suma de los determinantes obtenidos, sustituyendo los elementos de la fila o columna mencionada por los primeros y segundos sumandos respectivamente. Por ejemplo, para matrices de orden tres:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} & b_{23}+c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 10$$

El segundo de los determinantes de la suma anterior es cero porque las filas primera y tercera son proporcionales. †

8. Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5,$$

calcula el valor de los determinantes

$$\begin{vmatrix} b & b+a & 2c \\ e & e+d & 2f \\ h & h+g & 2i \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

septiembre, 2012 – propuesta A

Solución

En este ejercicio vamos a hacer uso de las propiedades mencionadas en los ejercicios anteriores. En particular, usaremos en el primero de los pasos la propiedad expuesta en el apartado c) del ejercicio anterior.

$$\begin{vmatrix} b & b+a & 2c \\ e & e+d & 2f \\ h & h+g & 2i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b & 2c \\ e & e & 2f \\ h & h & 2i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & 2c \\ e & d & 2f \\ h & g & 2i \end{vmatrix} = 0 + 2\begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2\cdot 5 = -10.$$

$$\begin{vmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d+g & e+h & f+i \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5. \dagger$$

9. a) Sabiendo que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2$$

Donde a, b y $c \in \mathbb{R}$, calcula los determinantes

$$\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

b) Razona que, puesto que $|A| = 2$, los parámetros a, b y c deben ser distintos entre sí (no puede haber dos iguales).

junio 2013 – propuesta B

Solución

En este ejercicio volveremos a hacer uso de las propiedades de los determinantes ya varias veces utilizadas en los ejercicios anteriores.

a) $$\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -\left(-5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \right) = 5\cdot 5 = 25 \, .$$

b) $$\begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+2a+1 & b^2+2b+1 & c^2+2c+1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a+1 & 2b+1 & 2c+1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 5 \, .$$ †

---

10. a) Sabiendo que A es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|A| = 5$, calcula razonadamente el valor de los determinantes

$$|-A| ,\ \left|A^{-1}\right| ,\ \left|A^{T}\right| ,\ \left|A^{3}\right|$$

b) Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

calcula, usando las propiedades de los determinantes,

$$\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

junio 2014 – propuesta A

Solución

a) Usando la propiedad según la cual $|k\cdot A| = |k|\cdot|A|$, tenemos: $|-A| = |-1|\cdot|A| = 1\cdot 5 = 5$.

Como $1 = \left|A\cdot A^{-1}\right| = |A|\cdot\left|A^{-1}\right| = 5\cdot\left|A^{-1}\right| \Rightarrow \left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{5}$. En general $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$.

El determinante de una matriz cuadrada es igual que el de su traspuesta, con lo que $\left|A^{T}\right| = |A| = 5$.

$\left|A^{3}\right| = |A\cdot A\cdot A| = |A|\cdot|A|\cdot|A| = 5\cdot 5\cdot 5 = 125$.

b) $$\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ a & b & c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} + 0 = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 3 \cdot \left(-\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = 3 \cdot (-2) = -6$$