Continuidad de las funciones. Derivadas

1. Estudiar en x = 0 y $x=\dfrac{\pi}{2}$ la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x)=\begin{cases} \cos x & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{2x}{\pi}+2 & \text{si} \quad 0<x<\dfrac{\pi}{2} \\ 2+\operatorname{sen} x & \text{si} \quad x\ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

(Junio 1997)

Solución:

f es claramente continua en todo ¡ salvo, quizás, en x = 0 y $x=\dfrac{\pi}{2}$. Estudiemos la continuidad en estos puntos:

- x = 0

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\cos x=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2x}{\pi}+2\right)=2 \end{array}\right. \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} f(x)$$ por ser distintos los límites laterales y por tanto f no es continua en 0 (discontinuidad de salto de longitud L = 1)

- $x=\dfrac{\pi}{2}$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\left(\dfrac{2x}{\pi}+2\right)=3 \\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}(2+\operatorname{sen} x)=3 \end{array}\right. \Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x)=3=f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \text{f es continua en } x=\frac{\pi}{2}$$

Resumiendo: f es continua en ¡ − {0}.

Estudiemos ahora la derivabilidad. La función f es claramente derivable en $(-\infty,\,0)\cup\left(0,\,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\,+\infty\right)$, con derivada $f'(x)=\begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{2}{\pi} & \text{si} \quad 0<x<\dfrac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si} \quad x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

En x = 0 no es derivable pues no es continua, y en $x=\dfrac{\pi}{2}$ se tiene:

$$\left\{\begin{array}{l} f'\left(\frac{\pi}{2}^-\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{2}{\pi}\right)=\frac{2}{\pi} \\ f'\left(\frac{\pi}{2}^+\right)\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(\cos x)=0 \end{array}\right. \Rightarrow$$ f no es derivable en el punto $x=\frac{\pi}{2}$, pues las derivadas laterales son distintas.

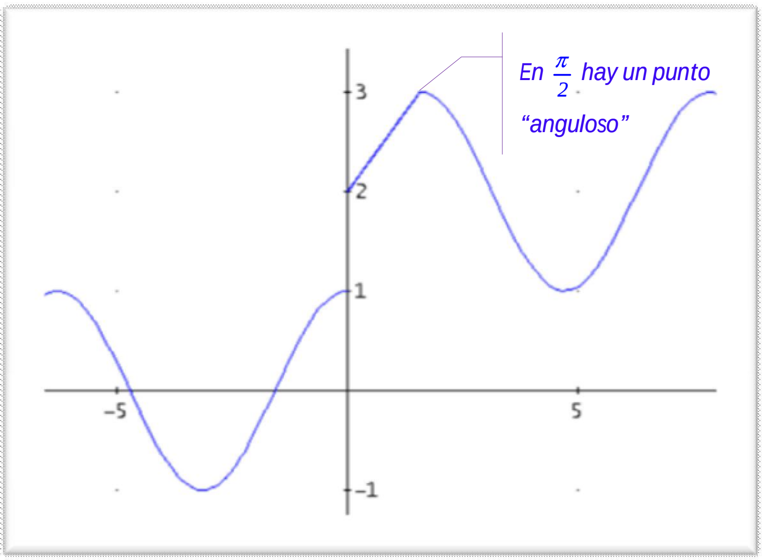
Resumiendo: f es derivable en $\mathbb{R}-\left\{0,\frac{\pi}{2}\right\}$

La derivabilidad en $x=\frac{\pi}{2}$ también se podría haber estudiado utilizando la definición de derivada de una función para hallar las derivadas laterales a la izquierda y a la derecha de $\frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\left(\frac{2x}{\pi}+2\right)-\left(\frac{2\frac{\pi}{2}}{\pi}+2\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{2x}{\pi}+2-3}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{2x-\pi}{\pi}}{\frac{2x-\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{(2+\operatorname{sen}x)-\left(2+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\cos x=0$$

(en este último paso se ha utilizado la regla de L'Hôpital).



†

2. Calcular a y b para que f(x) sea continua en x = 0 y x = 1

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{si} \quad x\le 0\\ a+x^3 & \text{si} \quad 0<x<1\\ \dfrac{b}{2x} & \text{si} \quad x\ge 1\end{cases}$$

Para los valores de a y b obtenidos, estudiar la derivabilidad en x = 0 y x = 1.

(Septiembre 1997)

Solución:

Para que f sea continua en 0 debe existir el límite cuando x tiende a 0 y coincidir con la imagen de la función en 0. El límite en 0 existirá si existen los límites laterales y son iguales:

f es continua en 0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=\cos 0=1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\cos x=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(a+x^3\right)=a\end{array}\right] \Leftrightarrow a=1$$

Análogamente, en x = 1:

f es continua en 1 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=a+1^3=2$ (pues a = 1) $\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(a+x^3\right)=a+1=2\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(a+x^3\right)=\dfrac{b}{2}\end{array}\right] \Leftrightarrow \frac{b}{2}=2 \Leftrightarrow b=4$$

Para estos dos valores de a y b la función queda de la siguiente forma:

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{si} \quad x\le 0\\ 1+x^3 & \text{si} \quad 0<x<1\\ \dfrac{2}{x} & \text{si} \quad x\ge 1\end{cases}$$

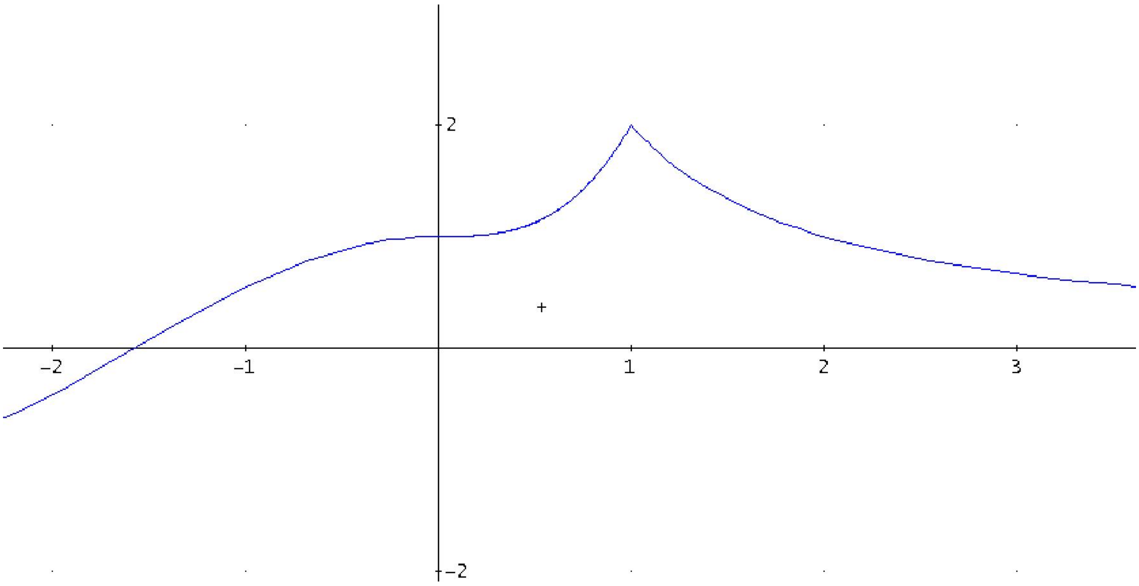
Estudiemos ahora la derivabilidad. La función f es claramente derivable en $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$, con derivada $f'(x)=\begin{cases}-\text{sen } x & \text{si} \quad x<0\\ 3x^2 & \text{si} \quad 0<x<1\\ -\dfrac{2}{x^2} & \text{si} \quad x>1\end{cases}$.

En x = 0 se tiene:

$$\begin{cases} f'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(-\text{sen}\, x) = 0 \\ f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(3x^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$ f es derivable en el punto x = 0, pues las derivadas laterales coinciden. Además f '(0) = 0.

En x = 1 se tiene:

$$\begin{cases} f'(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(3x^2) = 3 \\ f'(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(-\dfrac{2}{x^2}\right) = -2 \end{cases} \Rightarrow$$ f no es derivable en el punto x = 1, pues las derivadas laterales son distintas.



Por tanto f es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$ con derivada $f'(x) = \begin{cases} -\text{sen}\, x & \text{si} \quad x < 0 \\ 3x^2 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ -\dfrac{2}{x^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

3. Calcular a y b para que f(x) sea continua en x = 0 y x = 1

$$f(x) = \begin{cases} e^x + a & \text{si} \quad x \le 0 \\ ax^2 + 2 & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ \dfrac{b}{2x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Para los valores de a y b obtenidos anteriormente, estudiar la derivabilidad de f(x) en x = 0.

(Junio 1998)

Solución:

Para que f sea continua en 0 debe existir el límite cuando x tiende a 0 y coincidir con la imagen de la función en 0. El límite en 0 existirá si existen los límites laterales y son iguales:

f es continua en 0 $\Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = e^0 + a = 1 + a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(e^x + a\right) = e^0 + a = 1 + a \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(ax^2 + 2\right) = 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 1 + a = 2 \Leftrightarrow a = 1$$

Análogamente, en x = 1:

f es continua en 1 $\Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = a + 2 = 3$

(recuérdese que a = 1) $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(x^2 + 2\right) = 3 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\dfrac{b}{2x}\right) = \dfrac{b}{2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \dfrac{b}{2} = 3 \Leftrightarrow b = 6$

Para estos dos valores de a y b la función queda de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & \text{si} \quad x \le 0 \\ x^2 + 2 & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ \dfrac{3}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Estudiemos ahora la derivabilidad. La función f es claramente derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$, con derivada $f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ -\dfrac{3}{x^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$.

En x = 0 se tiene:

$\begin{cases} f'\left(0^-\right) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(e^x\right) = 1 \\ f'\left(0^+\right) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}(2x) = 0 \end{cases} \Rightarrow$ f no es derivable en el punto x = 0, pues las derivadas laterales son distintas.

En x = 1 se tiene:

$\begin{cases} f'\left(1^-\right) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(2x\right) = 2 \\ f'\left(1^+\right) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(-\dfrac{3}{x^2}\right) = -3 \end{cases} \Rightarrow$ f no es derivable en el punto x = 1, pues las derivadas laterales son distintas.

Por tanto f es derivable en ¡ $-\{0, 1\}$ con derivada $f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ -\dfrac{3}{x^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ †

4. Determinar a y b para que f(x) sea continua en $x = -1$ y $x = 1$

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3+ax^2-1 & \text{si} \quad x\le -1 \\ \dfrac{a}{2x} & \text{si} \quad -1<x\le 1 \\ e^{x-1}+2b & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Para los valores de a y b obtenidos anteriormente, estudiar si f(x) es derivable en $x = 1$.

(Septiembre 1998)

Solución:

Para que f sea continua en -1 debe existir el límite cuando x tiende a -1 y coincidir con la imagen de la función en -1. El límite en -1 existirá si existen los límites laterales y son iguales:

f es continua en $-1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) = 2(-1)^3 + a(-1)^2 - 1 = a-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \left(2x^3+ax^2-1\right) = 2(-1)^3 + a(-1)^2 - 1 = a-3 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \left(\dfrac{a}{2x}\right) = -\dfrac{a}{2} \end{array}\right] \Leftrightarrow a-3 = \frac{-a}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a-6=-a \Leftrightarrow 3a=6 \Leftrightarrow a=2$$

Análogamente, en $x = 1$:

f es continua en $1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = \dfrac{2}{2\cdot 1} = 1$

(recuérdese que $a = 1$) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(e^{x-1}+2b\right) = e^0 + 2b = 1+2b \end{array}\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 = 1 + 2b \Leftrightarrow 0 = 2b \Leftrightarrow b = 0$

Para estos dos valores de a y b la función queda de la siguiente forma:

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3+2x^2-1 & \text{si} \quad x\le -1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad -1<x\le 1 \\ e^{x-1} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Obsérvese en primer lugar que f está definida en ¡ − {0}, por tanto en $x = 0$ la función no es continua ni derivable: en $x = 0$ hay una asíntota vertical.

Estudiemos ahora la derivabilidad. La función f es claramente derivable en $(-\infty,\,-1)\cup(-1,\,1)\cup(1,\,+\infty)-\{0\}$, con derivada $f\,'(x)=\begin{cases}6x^2+4x & \text{si} \quad x<-1\\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad -1<x<1\\ e^{x-1} & \text{si} \quad x>1\end{cases}$.

En x = −1 se tiene:

$$\begin{cases} f\,'\left(-1^-\right)=\lim\limits_{x\to-1^-} f\,'(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\left(6x^2+4x\right)=2\\ f\,'\left(-1^+\right)=\lim\limits_{x\to-1^+} f\,'(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-1\end{cases}$$

$\Rightarrow$ f no es derivable en el punto x = −1, pues las derivadas laterales son distintas.

En x = 1 se tiene:

$$\begin{cases} f\,'\left(1^-\right)=\lim\limits_{x\to1^-} f\,'(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-1\\ f\,'\left(1^+\right)=\lim\limits_{x\to1^+} f\,'(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(e^{x-1}\right)=1\end{cases}$$

$\Rightarrow$ f no es derivable en el punto x = 1, pues las derivadas laterales son distintas.

Por tanto f es derivable en ¡ $-\{-1,\,0,\,1\}$ con derivada:

$$f\,'(x)=\begin{cases}6x^2+4x & \text{si} \quad x<-1\\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad -1<x<0\\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad 0<x<1\\ e^{x-1} & \text{si} \quad x>1\end{cases} \quad \dagger$$

5. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases}3x+5 & \text{si} \quad x\le-1\\ 2 & \text{si} \quad -1<x\le1\\ x^2-3x+1 & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

(Junio 1999)

Solución:

La función f es claramente continua en todo ¡ salvo, quizás, en x = −1 y x = 1. Estudiemos la continuidad en estos dos puntos.

En x = −1:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}(3x+5)=3(-1)+5=2\\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=2\end{cases}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-1} f(x)=2=f(-1) \Rightarrow$ f es continua en x = −1.

En x = 1:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2-3x+1\right) = -1 \end{cases} \Rightarrow$$ no existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ por ser los límites laterales distintos $\Rightarrow$ f no es continua en x = 1.

La función f es claramente derivable en $(-\infty,\,-1)\cup(-1,\,1)\cup(1,\,+\infty)$ con derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x < -1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 2x-3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

En x = −1 se tiene:

$$\begin{cases} f'\left(-1^-\right) = \lim\limits_{x\to -1^-} f'(x) = 3 \\ f'\left(-1^+\right) = \lim\limits_{x\to -1^+} f'(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$ f no es derivable en el punto x = −1, pues las derivadas laterales son distintas.

Por otro lado, como f no es continua en x = 1, f no es derivable en x = 1.

Resumiendo, f es derivable en ¡ − {−1, 1} con derivada $f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x < -1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 2x-3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

†

6. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \le 0 \\ a+bx & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ 3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$, determinar a y b de modo que sea continua. Para los valores que se obtengan, estudiar la derivabilidad.

(Junio 2000)

Solución:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(a+bx) = a \end{cases} \Rightarrow$$ para que f sea continua en x = 0 debe de ser a = 0 pues en este caso $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} bx = b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3 \end{cases} \Rightarrow$$ para que f sea continua en x = 1 ha de ser b = 3 pues en este caso $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3 = f(1)$

Por tanto si a = 0 y b = 3, f es continua en todo ¡ y queda de la siguiente manera:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x\le 0 \\ 3x & \text{si} \quad 0<x\le 1 \\ 3 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

En principio, f es claramente derivable en $\mathbb{R}-\{0,1\}$ con derivada:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si} \quad x<0 \\ 3 & \text{si} \quad 0<x<1 \\ 0 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Estudiemos la derivabilidad en x = 0 y x = 1

$$\begin{cases} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x)=0 \\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=3 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ f no es derivable en el punto x = 0, pues las derivadas laterales son distintas.

$$\begin{cases} f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=3 \\ f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=0 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ f no es derivable en el punto x = 1, pues las derivadas laterales son distintas.

En resumen: f es derivable en $\mathbb{R}-\{0,1\}$ con derivada $f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si} \quad x<0 \\ 3 & \text{si} \quad 0<x<1 \\ 0 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$ †

7. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2-x} & \text{si} \quad x\le 1 \\ -x^2+4x-2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

(Septiembre 2000)

Solución:

La función f es claramente continua en todo $\mathbb{R}$ salvo, quizás, en x = 1. Estudiemos la continuidad en este punto:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{2-x}=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(-x^2+4x-2\right)=1 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ f es continua en x = 1 pues $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1=f(1)$

La función es derivable en todo $\mathbb{R}-\{1\}$ con derivada $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(2-x)^2} & \text{si} \quad x<1 \\ -2x+4 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

Estudiemos la derivabilidad en x = 1:

$$\begin{cases} f'(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{(2-x)^2} = 1 \\ f'(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (-2x+4) = 2 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ f no es derivable en el punto x = 1, pues las derivadas laterales no coinciden.

Resumiendo: f es derivable en todo $\mathbb{R} - \{1\}$ con derivada $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2-x)^2} & \text{si} \quad x < 1 \\ -2x+4 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ †

8. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x^2+k & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

a) Determina k para que f(x) sea continua en x = 1

b) ¿Es la función f(x) para el valor k calculado derivable en x = 1?

(Junio 2001)

Solución:

a) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (2x+5) = 7 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2+k) = 1+k \end{cases}$ $\Rightarrow$ 7 = 1 + k $\Rightarrow$ k = 6. Por tanto si k = 6 se cumple que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 7 = f(1)$ y f es continua en x = 1.

b) Si k = 1 la función es: $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x^2+k & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$, que es derivable en todo $\mathbb{R}$ salvo, quizás en x = 1, con derivada $f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

Estudiemos la derivabilidad en x = 1:

$$\begin{cases} f'(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = 2 \\ f'(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (2x) = 2 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ f es derivable en x = 1 pues coinciden las derivadas laterales.

Por tanto f es derivable en todo $\mathbb{R}$ con derivada $f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ 2x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ †

9. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x \le -2 \\ ax^2+bx & \text{si} \quad -2 < x \le 4 \\ x-4 & \text{si} \quad 4 < x \end{cases}$, determina a y b de modo que sea continua. Para los valores que se obtengan, estudia la derivabilidad.

(Septiembre 2001)

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-}\left(2x+1\right) = -3\\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+}\left(ax^2+bx\right) = 4a-2b\end{array}\right. \Rightarrow \text{ f será continua en } x = -2 \text{ si } -3 = 4a - 2b$$

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-}\left(ax^2+bx\right) = 16a+4b\\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+}\left(x-4\right) = 0\end{array}\right. \Rightarrow \text{ f será continua en } x = 4 \text{ si } 16a + 4b = 0$$

Resolviendo el sistema $\left\{\begin{array}{l}4a+2b=-3\\16a+4b=0\end{array}\right.$, se obtiene $a = \frac{-1}{4}$ y $b = 1$. Para estos dos valores f es continua en todo ¡ y la función queda de la forma:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll}2x+1 & \text{si} & x \le -2\\ \frac{-1}{4}x^2+x & \text{si} & -2 < x \le 4\\ x-4 & \text{si} & 4 < x\end{array}\right.$$

En principio, f es claramente derivable en ¡ − {−2, 4} con derivada:

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll}2 & \text{si} & x < -2\\ \frac{-1}{2}x+1 & \text{si} & -2 < x < 4\\ 1 & \text{si} & 4 < x\end{array}\right.$$

Estudiemos la derivabilidad en x = −2 y x = 4

$$\left\{\begin{array}{l}f'\left(-2^-\right) = \lim\limits_{x\to -2^-} f'(x) = 2\\ f'\left(-2^+\right) = \lim\limits_{x\to -2^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to -2^+}\left(\frac{-1}{2}x+1\right) = 2\end{array}\right. \Rightarrow \text{ f es derivable en el punto } x = -2, \text{ pues}$$

las derivadas laterales coinciden.

$$\left\{\begin{array}{l}f'\left(4^-\right) = \lim\limits_{x\to 4^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 4^-}\left(\frac{-1}{2}x+1\right) = -1\\ f'\left(4^+\right) = \lim\limits_{x\to 4^+} f'(x) = 1\end{array}\right. \Rightarrow \text{ f no es derivable en el punto } x = 4, \text{ pues}$$

las derivadas laterales son distintas.

En resumen: f es derivable en ¡ − {4} con derivada

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll}2 & \text{si} & x \le -2\\ \frac{3}{2}x-3 & \text{si} & -2 < x < 4\\ 1 & \text{si} & 4 < x\end{array}\right. \dagger$$

10. La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x)=\begin{cases} x^2+bx+c & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{L(1+x)}{x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$ es derivable en el punto x = 0. Calcula cuánto valen las constantes b y c. (L = logaritmo neperiano).

(Junio 2002)

Solución:

Como es derivable en x = 0, entonces es continua en x = 0 $\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = c = f(0)$ y los límites laterales deben coincidir y ser iguales a c:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = c$$

Utilicemos la regla de L'Hôpital para calcular el límite a la derecha de cero:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{L(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$$

Por tanto para que f sea derivable en x = 0 debe de ser c = 1

La derivada de la función f es: $f'(x)=\begin{cases} 2x+b & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{x-(1+x)L(1+x)}{x^2(1+x)} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$, pues la derivada de la función $y=\dfrac{L(1+x)}{x}$ es:

$$y' = \frac{\frac{1}{1+x}x - L(1+x)\cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{x-(1+x)L(1+x)}{1+x}}{x^2} = \frac{x-(1+x)L(1+x)}{x^2(1+x)}$$

Como f es derivable en x = 0, coinciden las derivadas laterales en x = 0:

$$\begin{cases} f'\left(0^-\right) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-}(2x+b) = b \\ f'\left(0^+\right) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x-(1+x)L(1+x)}{x^2(1+x)} = \dfrac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow b = \frac{-1}{2}$$

El segundo de los límites se ha hecho volviendo a utilizar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x-(1+x)L(1+x)}{x^2(1+x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\left(L(1+x)+(1+x)\frac{1}{1+x}\right)}{2x(1+x)+x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-L(1+x)}{3x^2+2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-1}{1+x}}{6x+2} = \frac{-1}{2} \dagger$$

11. Sea la función f: ¡ $\to$ ¡ dada por $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & \text{si} \quad x\le 3 \\ 2x-4 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$

a) Define continuidad de una función en un punto.

b) ¿En qué puntos es continua la función f(x)?

c) ¿En qué puntos es derivable la función f(x)?

d) Si una función no es continua en un punto, ¿puede ser derivable en él?

(Septiembre 2003)

Solución:

a) Una función f es continua en un punto x = a si existe el límite de la función en x = a y coincide con la imagen de la función en dicho punto:

$$f \text{ continua en } a \Leftrightarrow \text{existe } \lim_{x\to a} f(x) \text{ y } \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

b) f es continua en todo ¡, salvo, quizás en x = 3. Estudiemos la continuidad en este punto:

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(x^2-4x+3\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(2x-4\right)=2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ f no es continua en x = 3, pues al no coincidir los límites laterales, no existe el límite de la función en x = 3

c) Si f no es continua en un punto, entonces no es derivable en dicho punto. Por tanto f no es derivable en x = 3. En el resto de puntos sí que es derivable (las funciones polinómicas son derivables en todo ¡), con derivada:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-4 & \text{si} \quad x<3 \\ 2 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$

d) No. Una condición necesaria para que una función sea continua es que sea derivable, pero no es suficiente: es decir, una función continua no tiene porqué ser derivable. De aquí se deduce que toda función que no es continua en un punto, no es derivable en dicho punto. Simbólicamente:

$$[f \text{ derivable} \Rightarrow f \text{ continua}] \Rightarrow [f \text{ no continua} \Rightarrow f \text{ no derivable}]$$ †

12. Determina b y c para que la función $f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x\le 2 \\ -x^2+bx+c & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

a) Sea derivable en todos los puntos de ¡ .

b) Calcula la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa 1.

(Junio 2004)

Solución:

a) Para que f sea continua en x = 2 $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)=8$ y para que exista $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ deben de existir los laterales y ser iguales:

$$\begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(x^3\right) = 8 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(-x^2 + bx + c\right) = -4 + 2b + c \end{cases} \Rightarrow 8 = -4 + 2b + c \Rightarrow 2b + c = 12 \ \textbf{(*)}$$

La función derivada en $\mathbb{R} - \{2\}$ es:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si} \quad x < 2 \\ -2x + b & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Para que f sea derivable en x = 2 las derivadas laterales tienen que ser iguales:

$$\begin{cases} f'\left(2^-\right) = \lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(3x^2\right) = 12 \\ f'\left(2^+\right) = \lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(-2x + b\right) = -4 + b \end{cases} \Rightarrow 12 = -4 + b \Rightarrow b = 16.$$

Sustituyendo en **(*)**, $32 + c = 12 \Rightarrow c = -20$.

b) La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 1 = 3(x - 1) \Rightarrow y - 1 = 3x - 3 \Rightarrow y = 3x - 2$. †

13. Considera la función siguiente $f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ ax + b & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

a) Determina los valores de a y b para que sea derivable en todos los puntos.

b) Esboza la gráfica de la curva representativa de la función para los valores de a y b calculados.

(Septiembre 2004)

Solución:

a) Para que f sea continua en $x = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 0$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(x^3 - x^2\right) = 0 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(ax + b\right) = a + b \end{cases} \Rightarrow a + b = 0 \ \textbf{(*)}$$

La derivada de f en $\mathbb{R} - \{1\}$ es:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x & \text{si} \quad x < 1 \\ a & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

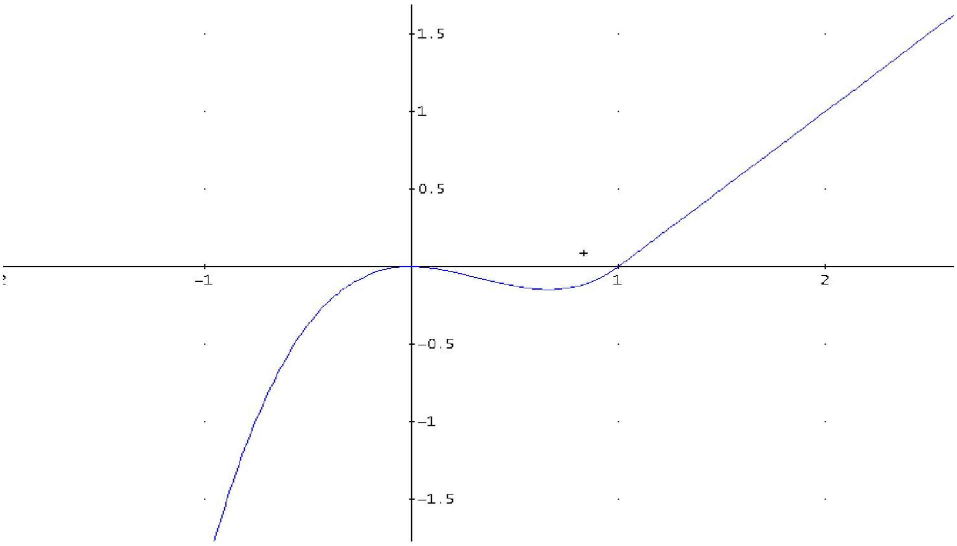
Para que f sea derivable en x = 1 deben de coincidir las derivadas laterales:

$$\begin{cases} f'\left(1^-\right) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(3x^2 - 2x\right) = 1 \\ f'\left(1^+\right) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = a \end{cases} \Rightarrow a = 1$$

Sustituyendo en **(*)**, $1 + b = 0 \Rightarrow b = -1$

Por tanto, para que f sea derivable en todos los puntos han de ser a = 1 y b = −1. En este caso la función es: $f(x)=\begin{cases} x^3-x^2 & \text{si} \quad x\le 1 \\ x-1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

b)



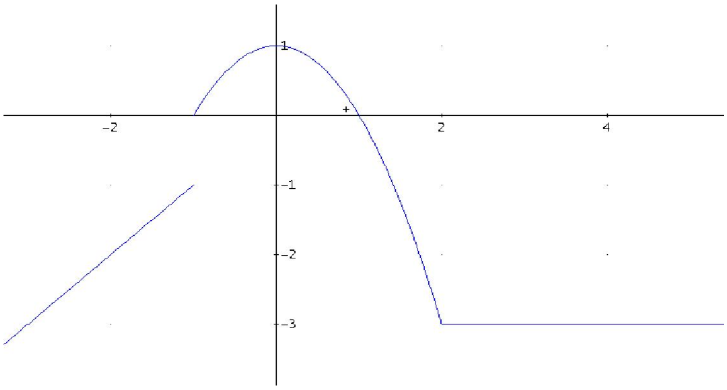
14. Estudia si la función $f(x)=\begin{cases} x & \text{si} \quad x\le -1 \\ 1-x^2 & \text{si} \quad -1<x\le 2 \\ -3 & \text{si} \quad 2<x \end{cases}$ es continua en los puntos x = −1 y x = 2. Representa gráficamente dicha función.

(Junio 2005)

Solución:

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x)=1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(1-x^2\right)=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$ no existe $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ porque los límites laterales no coinciden y f no es continua en x = −1 (discontinuidad de salto finito de longitud 1).

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(1-x^2\right)=-3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-3 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=-3=f(2) \Rightarrow$$ f es continua en x = 2.



15. Determina, si es posible, los valores del parámetro k ∈ ¡ para que la función definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1-e^x}{2x+1-e^{2x}} & \text{si} \quad x<0 \\ (2x-k)^2-6 & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$, sea continua en x = 0.

(Septiembre 2006)

Solución:

El límite por la izquierda de cero lo calcularemos utilizando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1-e^x}{2x+1-e^{2x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-e^x}{2-2e^{2x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0^-}\frac{-e^x}{-4e^{2x}}=\frac{-1}{-4}=\frac{1}{4}$$

El límite por la derecha de cero es:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left((2x-k)^2-6\right)=k^2-6$$

Para que exista el límite deben de coincidir los límites laterales:

$$k^2-6=\frac{1}{4}\Rightarrow k^2=\frac{1}{4}+6\Rightarrow k^2=\frac{25}{4}\Rightarrow k=\sqrt{\frac{25}{4}}\Rightarrow k=\pm\frac{5}{2}$$

Para estos valores de k, f será continua en x = 0 pues entonces $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$ †

16. a) Define el concepto de función continua en un punto.

b) Si $f(x)=\dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{4x}$, indica de forma razonada en qué valor x = a no está definida f(x).

c) Calcula el valor de b∈ ¡ para que la función $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x\neq a \\ b & \text{si} \quad x=a \end{cases}$ sea continua.

(Junio 2007)

Solución:

a) Una función f es continua en un punto x = a si existe el límite de la función en x = a y coincide con la imagen de la función en dicho punto:

$$f \text{ continua en } a \Leftrightarrow \text{existe } \lim_{x\to a} f(x) \text{ y } \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

b) f no está definida en x = 0 porque anula el denominador de la expresión $\dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{4x}$.

c) g es continua en todo punto donde lo sea f, es decir en ¡ − {0}. Es decir, la función $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x\neq 0 \\ b & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$, es continua en ¡ − {0}. Para que g sea continua en x = 0, debe existir $\lim_{x\to 0} g(x)$ y $\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)=b$. Entonces:

$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{3e^{3x} + 3e^{-3x}}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, donde se ha utilizado la regla de L'Hôpital.

Por tanto el valor de b para que g sea continua es $b = \frac{3}{2}$ †