Matemáticas aplicadas a las CCSS II - 2º de Bachillerato
Examen Final de Junio (Suficiencia 3ª Evaluación) - 25 de mayo de 2010

1. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$, se pide:
   a) Dominio y puntos de corte con los ejes. (**1 punto**)
   b) Continuidad y asíntotas. (**1 punto**)
   c) Crecimiento, decrecimiento y extremos relativos. (**1 punto**)
   d) Representación gráfica. (**1 punto**)

2. Entre la población de una determinada región se estima que el 55 % presenta obesidad, el 20 % padece hipertensión y el 15 % tiene obesidad y es hipertenso.
   a) Calcula la probabilidad de ser hipertenso o tener obesidad. (**1 punto**)
   b) Si una persona es hipertensa, ¿cuál es la probabilidad de que sea obesa? (**1 punto**)

3. Lanzamos una moneda al aire y, según salga cara o cruz, sacamos una bola de la urna U_1 o de la urna U_2. La primera urna contiene tres bolas blancas y dos bolas negras, la segunda urna, tres blancas y cinco negras. Se pide:
   i) Hallar la probabilidad de sacar una bola negra. (**1 punto**)
   ii) Si la bola extraída fue blanca, hallar la probabilidad de que procediera de la urna U_1. (**1 punto**)

4. En una muestra de 100 alumnos de bachillerato se ha obtenido una media de 10 en una prueba de aptitud numérica. La aptitud numérica es una variable que se distribuye normalmente en la población con desviación típica igual a 4.
   a) Halla un intervalo de confianza para la media de la población con un nivel de confianza del 93 %. (**1 punto**)
   b) Interpreta el significado de este intervalo. (**1 punto**)

Soluciones

1. a) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$. El punto de corte con el eje Y es $(0,\ -2)$. La gráfica de f no corta al eje X pues la ecuación $\dfrac{x^2-2x+2}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$, no tiene soluciones reales.

   b) Por un lado tenemos que: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+2}{x-1} = \dfrac{1}{0} = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad x \to 1^- \\ +\infty & \text{si} \quad x \to 1^+ \end{cases} \Rightarrow f$ no es continua en $x = 1$. En este punto hay una discontinuidad de salto infinito Además, $x = 1$ es una asíntota vertical.

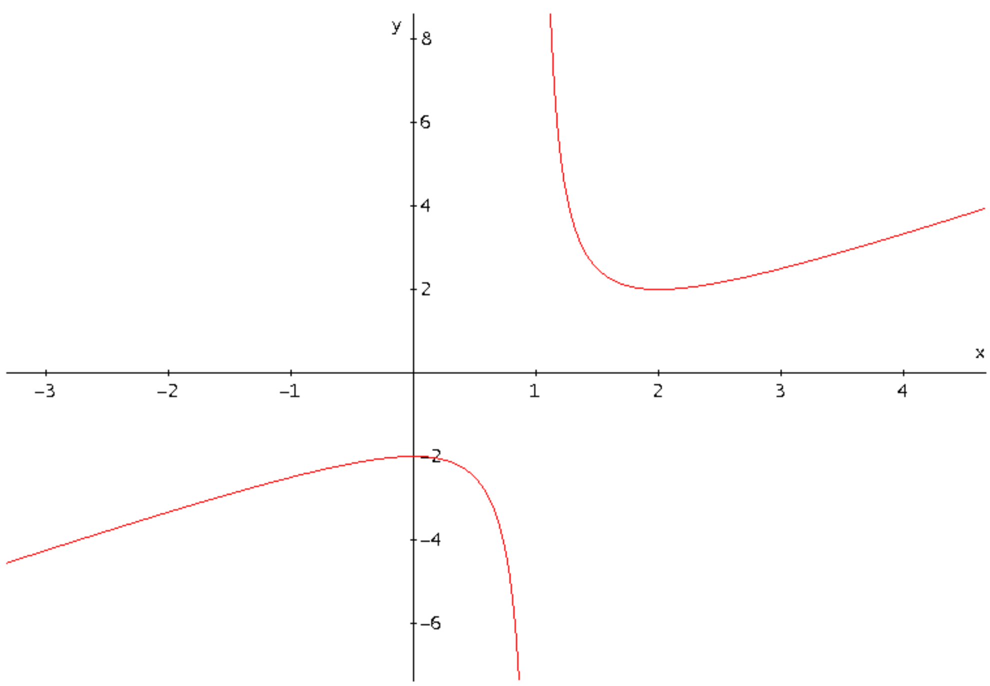
   Por otro lado: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2x+2}{x-1} = \infty = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad x \to -\infty \\ +\infty & \text{si} \quad x \to +\infty \end{cases} \Rightarrow f$ no tiene asíntotas horizontales.

   c) $f'(x) = \dfrac{(2x-2)(x-1) - (x^2-2x+2)\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. Por tanto se tiene que $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$. De este modo podemos confeccionar la siguiente tabla tomando como puntos frontera los posibles extremos: $x = 0$ y $x = 2$; y el punto de discontinuidad $x = 1$ (en el que no está definida la función):

	$(-\infty,\ 0)$	$(0,\ 1)$	$(1,\ 2)$	$(2,\ +\infty)$
signo de f'	$+$	$-$	$-$	$+$

   Por tanto f es estrictamente decreciente en $(0,\ 1) \cup (1,\ 2)$ y estrictamente creciente en $(-\infty,\ 0) \cup (2,\ +\infty)$. Además tiene un máximo relativo en $x = 0$ y un mínimo relativo en $x = 2$. Concretamente el máximo es el punto $(0, -2)$ (el punto de corte con el eje Y) y el mínimo es el punto $(2, 2)$.

   d) Utilizando los apartados anteriores, la representación gráfica de la función queda como sigue:

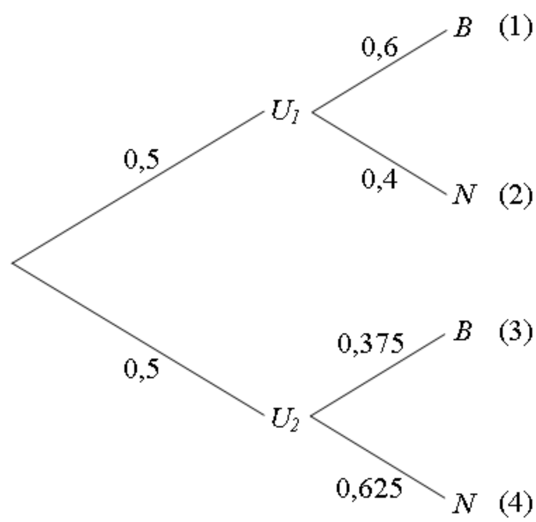


2. Sean los sucesos O "presentar obesidad" y H "padecer hipertensión". Entonces, según el enunciado, $P(O) = 0{,}55$; $P(H) = 0{,}2$ y $P(O \cap H) = 0{,}15$.

   a) $P(O \cup H) = P(O) + P(H) - P(O \cap H) = 0{,}55 + 0{,}2 - 0{,}15 = 0{,}6$.

   b) $P(O/H) = \dfrac{P(O \cap H)}{P(H)} = \dfrac{0{,}15}{0{,}2} = 0{,}75$.

3. Sean los sucesos U_1: "elegir urna U_1", U_2: "elegir urna U_2", B: "extraer bola blanca" y N: "extraer bola negra". Es claro que $P(U_1) = P(U_2) = 0{,}5$ pues las probabilidades de elegir la urna 1 o la urna 2 coinciden, respectivamente, con las probabilidades de salir cara o cruz al lanzar la moneda. Así pues, podemos construir el siguiente diagrama, el cual describe el experimento:



   Observando el diagrama podemos contestar con facilidad a cada uno de los dos apartados:

   a) $P(N) = P(U_1 \cap N) + P(U_2 \cap N) = (2) + (4) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}625 = 0{,}2 + 0{,}3125 = 0{,}5125$

   b) $P(U_1/B) = \dfrac{P(U_1 \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(U_1 \cap B)}{1 - P(N)} = \dfrac{0{,}5 \cdot 0{,}6}{1 - 0{,}5125} = \dfrac{0{,}3}{0{,}4875} = 0{,}615$

4. Con una confianza del 93 % se tiene que $1 - \alpha = 0{,}93 \Rightarrow \alpha = 0{,}07 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}035 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}965$. Por tanto, mirando en la tabla de la distribución normal $N(0,\ 1)$ se tiene que $z_{\alpha/2} = 1{,}81$

   a) El intervalo de confianza es:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(10 - 1{,}81\frac{4}{\sqrt{100}},\ 10 + 1{,}81\frac{4}{\sqrt{100}}\right) = (9{,}276,\ 10{,}724)$$

   b) El significado del intervalo es que la probabilidad de que la media poblacional μ se encuentre entre $9,276$ y $10{,}724$ es $0{,}93$ (la confianza); o lo que es lo mismo, en el 93 % de las ocasiones la media poblacional μ estará entre $9,276$ y $10{,}724$.