Matemáticas aplicadas a las CCSS II - 2º de Bachillerato
Primer Examen de la Tercera Evaluación - 27 de abril de 2010

1. Calcula la derivadas de las siguientes funciones y simplifica el resultado.

   a) $y = \dfrac{x}{4} + \dfrac{16}{x^3}$ (**1 punto**)

   b) $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$ (**1 punto**)

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{(x-1)^2}$, se pide:

   a) Dominio. (**0,2 puntos**)

   b) Puntos de corte con los ejes. (**0,3 puntos**)

   c) Continuidad. (**1 punto**)

   d) Asíntotas. (**0,5 puntos**)

   e) Crecimiento, decrecimiento y extremos relativos. (**1 punto**)

   f) Representación gráfica. (**1 punto**)

3. En los estudios de mercado previos a su implantación en una zona, una franquicia de tiendas de moda ha estimado que sus beneficios semanales (en miles de euros) dependen del número de tiendas que tiene en funcionamiento de acuerdo con la expresión $B(n) = -8n^3 + 60n^2 - 96n$, siendo n el número de tiendas en funcionamiento. Determina:

   a) El número de tiendas que debe tener en funcionamiento dicha franquicia para maximizar sus beneficios semanales. (**1 punto**)

   b) El valor de dichos beneficios máximos semanales. (**0,5 puntos**)

   c) La expresión que nos indica los beneficios medios semanales por cada tienda que dicha franquicia tiene en funcionamiento. (**0,5 puntos**)

4. Supongamos que, tras una encuesta, se ha concluido que si se elige al azar a una persona, la probabilidad de que esté a favor de la retransmisión de partidos de fútbol es de 0,8; de que esté a favor de la existencia de canales de pago, de 0,4; y de esté a favor de la retransmisión de partidos de fútbol y también de la existencia de canales de pago, de 0,3.

   a) Calcula la probabilidad de que una persona esté a favor de la retransmisión de partidos de fútbol o de la existencia de canales de televisión de pago. (**1 punto**)

   b) Calcula la probabilidad de que una persona no esté a favor de la retransmisión de partidos de fútbol ni de la existencia de canales de televisión de pago. (**1 punto**)

Soluciones

- **Ejercicio** 1**:**

  a) $y = \dfrac{x}{4} + \dfrac{16}{x^3} = \dfrac{1}{4}x + 16\dfrac{1}{x^3} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{4} + 16\left(\dfrac{-3x^2}{x^6}\right) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{48}{x^4} = \dfrac{x^4 - 192}{4x^4}$

  Otra forma de hacerlo:

  Ponemos la función de otra forma: $y = \dfrac{x^4 + 64}{4x^3}$, y ahora la derivamos:

  $$y' = \frac{4x^3 \cdot 4x^3 - (x^4 + 64)12x^2}{(4x^3)^2} = \frac{16x^6 - 12x^6 - 768x^2}{16x^6} = \frac{4x^6 - 768x^2}{16x^6} =$$
  $$= \frac{4x^2(x^4 - 192)}{16x^6} = \frac{x^4 - 192}{4x^4}$$

  b) $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}} \Rightarrow y' = \dfrac{\sqrt{x} - (x+1)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \dfrac{\dfrac{2x - x - 1}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}$

- **Ejercicio** 2**:**

  Escribamos la función: $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{(x-1)^2}$

  a) Esta función es racional. Por tanto su dominio son todos los números reales salvo aquellos que anulen el denominador.
  La ecuación $(x-1)^2 = 0$ tiene sólo una solución: $x = 1$. Así pues: $Dom f = \mathbb{R} - \{1\}$.

  b) ✓ Punto de corte con el eje Y. Haciendo $x = 0$ se tiene $y = \dfrac{-4}{1} = -4$. Por tanto el punto de corte con el eje Y es $(0, -4)$.

  ✓ Punto de corte con el eje X. Haciendo $y = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2 - 4}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$, ecuación que tiene por soluciones $x = -2$ y $x = 2$. Por tanto los puntos de corte con el eje X son $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

  c) La función es continua en todo su dominio. Veamos qué tipo de discontinuidad se da en el punto $x = 1$:

  $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 4}{(x-1)^2} = \dfrac{-3}{0} = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad x \to 1^- \\ -\infty & \text{si} \quad x \to 1^+ \end{cases}$ Por tanto, en el punto $x = 1$ la función no es continua por no ser finito $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$. Además, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

  d) La asíntota vertical ya se ha hallado en el apartado anterior. Veamos las horizontales: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 4}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x + 1} = 1$. Entonces $y = 1$ es una asíntota horizontal.

e) La derivada de la función es

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)^2 - (x^2-4)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2x(x^2-2x+1) - 2(x^3-x^2-4x+4)}{(x-1)^4} =$$

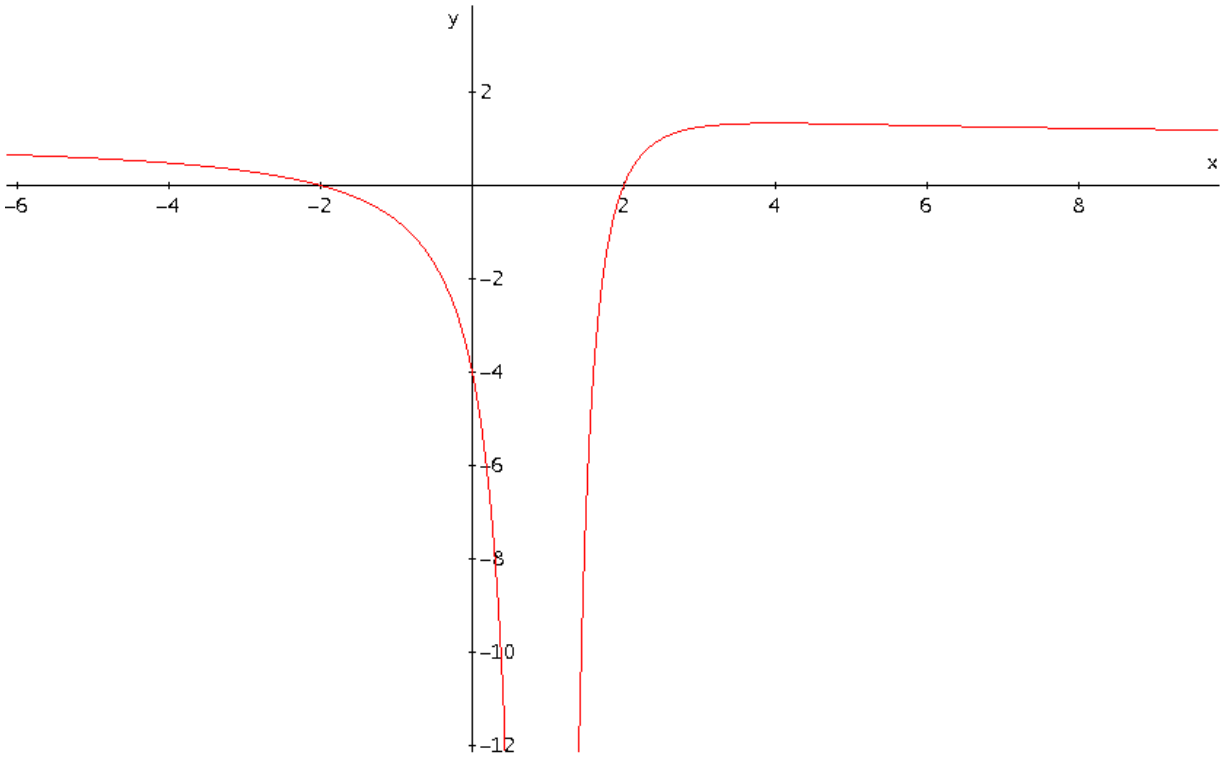
$$= \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x - 2x^3 + 2x^2 + 8x - 8}{(x-1)^4} = \frac{-2x^2 + 10x - 8}{(x-1)^4}$$

Entonces $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x^2+10x-8}{(x-1)^4} = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 10x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ó $x = 4$ (la solución $x = 1$ no se tiene en cuenta para el cálculo de extremos relativos pues el número $x = 1$ no pertenece al dominio de la función).

	$(-\infty, 1)$	$(1, 4)$	$(4, +\infty)$
signo de f'	$-$	$+$	$-$
	$\downarrow\downarrow$	$\uparrow\uparrow$	$\downarrow\downarrow$

Por tanto f es estrictamente decreciente en $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$ y estrictamente creciente en $(1, 4)$. Además, en el punto $x = 4$ tiene un máximo relativo pues en él la función pasa de ser estrictamente creciente a estrictamente decreciente. Exactamente el máximo relativo es el punto $\left(4, \dfrac{4}{3}\right)$.

f) La gráfica de la función es



- **Ejercicio** 3**:**

  a) $B'(n) = -24n^2 + 120n - 96$, $B'(n) = 0 \Leftrightarrow -24n^2 + 120n - 96 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ó $x = 4$. Estos dos puntos son los posibles extremos relativos.

	$(-\infty, 1)$	$(1, 4)$	$(4, +\infty)$
signo de B'	$-$	$+$	$-$
	$\downarrow\downarrow$	$\uparrow\uparrow$	$\downarrow\downarrow$

  Por tanto $x = 1$ es un mínimo y $x = 4$ es un máximo. Es decir, el número de tiendas que debe tener dicha franquicia para maximizar sus beneficios semanales es 4.

  b) Como $B(4) = -8 \cdot 4^3 + 60 \cdot 4^2 - 96 \cdot 4 = -512 + 960 - 384 = 64$. Por tanto, el valor de los beneficios máximos semanales es de 64000 euros.

  c) Los beneficios medios semanales por tienda se obtienen dividiendo los beneficios semanales entre el número de tiendas:

$$\frac{B(n)}{n} = \frac{-8n^3 + 60n^2 - 96n}{n} = -8n^2 + 60n - 96$$

- **Ejercicio** 4**:**
  Llamemos A al suceso "estar a favor de la retransmisión de partidos de fútbol" y B al suceso "estar a favor de la existencia de canales de pago". Entonces, según el enunciado del problema: $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}4$ y $P(A \cap B) = 0{,}3$

  a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}8 + 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}9$

  b) $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$