Examen de Matemáticas aplicadas a las CCSS II – 2º de Bachillerato

1. Halla tres números sabiendo que el primero es igual a dos veces el segundo más la mitad del tercero, que la suma del segundo y del tercero es igual al primero más 1 y que, si al segundo se le resta la suma del primero con el tercero, el resultado es 5.

Puntuación del ejercicio:

- Presentación de las incógnitas y planteamiento del problema: **1 punto**
- Resolución del mismo mediante el método de Gauss: **1 punto**
- Obtención de las soluciones: **0,5 puntos**

2. Resolver la siguiente ecuación matricial: $AX-3I=-X$, donde $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Puntuación del ejercicio:

- Procedimiento para despejar la incógnita X: **1 punto**
- Cálculo de la inversa de la matriz correspondiente: **1 punto**
- Obtención de la matriz X: **1 punto**

3. Una fábrica de papel tiene almacenados 4.000 kilos de pasta de papel normal A, y 3.000 kilos de pasta de papel reciclado B. La fábrica produce dos tipos diferentes de cajas de cartón. La caja del tipo 1 está fabricada con 0,2 kilos de A y 0,1 kilos de B, mientras que la caja del tipo 2 está fabricada con 0,2 kilos de A y 0,3 kilos de B. El precio de la caja del tipo 1 es 30 euros/unidad y el precio de la caja del tipo 2 es 40 euros/unidad. ¿Cuántas cajas de cada clase ha de elaborar la fábrica para maximizar sus ventas? ¿Cuál es ese valor máximo de las ventas?

Puntuación del ejercicio:

- Presentación de los datos en una tabla, descripción de las variables de decisión y de la función objetivo: **0,5 puntos**
- Planteamiento de las restricciones: **1 punto**
- Representación gráfica de la región factible: **1 punto**
- Cálculo de los vértices: **1 punto**
- Evaluación de los vértices en la función objetivo y explicación de la solución del problema: **1 punto**

Soluciones:

1. Llamemos x al primer número, y al segundo número y z al tercero. Entonces:

$$\begin{cases} x = 2y + \dfrac{z}{2} \\ y + z = x + 1 \\ y - (x+z) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4y - z = 0 \\ -x + y + z = 1 \\ -x + y - z = 5 \end{cases}$$. Resolvamos el sistema por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[2f_3+f_1]{2f_2+f_1} \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3-f_2} \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

El sistema asociado a esta última matriz es $\begin{cases} 2x - 4y - z = 0 \\ \quad -2y + z = 2 \\ \qquad -4z = 8 \end{cases}$. De la tercera ecuación se obtiene $z = -2$.

Sustituyendo en la segunda: $-2y - 2 = 2 \Rightarrow -2y = 4 \Rightarrow y = -2$. Finalmente, sustituyendo en la primera ecuación: $2x + 8 + 2 = 0 \Rightarrow x = -5$.

Por tanto el primer número es -5, el segundo -2 y el tercero también -2.

2. $AX - 3I = -X \Rightarrow AX + X = 3I \Rightarrow (A+I)X = 3I$. Llamando $D = A + I$, la ecuación es $DX = 3I$. Multiplicando a la izquierda los dos miembros de la igualdad por la inversa de D se tiene que $D^{-1}DX = D^{-1}(3I) \Rightarrow X = D^{-1}(3I)$.

Hallemos la inversa de la matriz D:

$$D = A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2f_3-f_1]{2f_2-f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[f_1-f_3]{f_2+f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} f_1/2 \\ f_2/4 \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$. Por tanto la matriz inversa de D es $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Entonces $X = D^{-1}(3I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Obsérvese que también se podría haber hecho así:

$$X = D^{-1}(3I) = 3D^{-1}I = 3D^{-1} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Las variable de decisión son: *x* cajas de tipo 1 e *y* cajas de tipo 2. Teniendo esto en cuenta:

	Cajas Tipo 1	Cajas Tipo 2	Recursos
Papel normal A	0,2	0,2	4000
Papel reciclado B	0,1	0,3	3000
Precio	30	40	
Cantidad	x	y	

La función objetivo es: $B(x,\, y) = 30x + 40y$

Planteemos la restricciones. Obsérvese que los recursos no van más allá de 4000 kilos de pasta de papel normal A y 3000 kilos de pasta de papel reciclado B. Entonces:

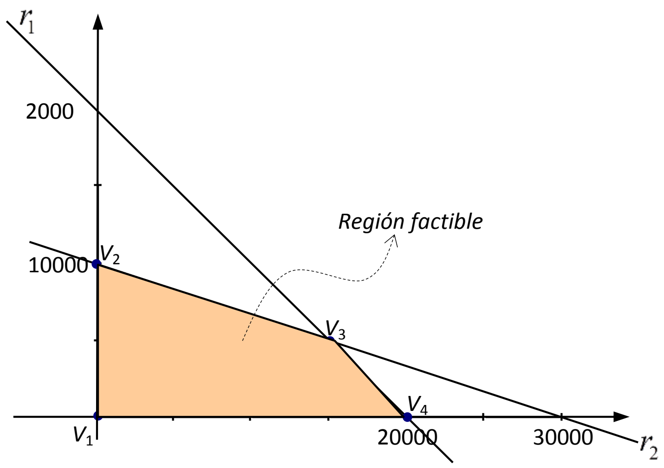
$$\left.\begin{array}{r} 0{,}2x + 0{,}2y \le 4000 \\ 0{,}1x + 0{,}3y \le 3000 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

Llamemos ahora $r_1 \equiv 0{,}2x + 0{,}2y = 4000$ y $r_2 \equiv 0{,}1x + 0{,}3y = 3000$

Representemos las rectas y deduzcamos la región factible:

Recta $r_1 \equiv 0{,}2x + 0{,}2y = 4000$. Puntos de corte con los ejes: $(0,\, 20000)$, $(20000,\, 0)$

Recta $r_2 \equiv 0{,}1x + 0{,}3y = 3000$. Puntos de corte con los ejes: $(0,\, 10000)$, $(30000,\, 0)$



Es claro que $V_1 = (0,\, 0)$, $V_2 = (0,\, 10000)$, $V_4 = (20000,\, 0)$. Para calcular V_3 hay que resolver el sistema formado por las rectas r_1 y r_2:

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}2x + 0{,}2y = 4000 \\ 0{,}1x + 0{,}3y = 3000 \end{array}\right\} \xrightarrow[20 f_2]{10 f_1} \left.\begin{array}{l} 2x + 2y = 40000 \\ 2x + 6y = 60000 \end{array}\right\} \xrightarrow{f_1 - f_2} -4y = -20000 \Rightarrow y = 5000$$

Sustituyendo en cualquiera de las dos ecuaciones se obtiene $x = 15000$

Así pues $V_3 = (15000,\, 5000)$

Evaluemos la función objetivo en los vértices:

$B(V_1) = B(0,\, 0) = 0$

$B(V_2) = B(0,\, 10000) = 400000$

$B(V_3) = B(15000,\, 5000) = 30 \cdot 15000 + 40 \cdot 5000 = 65000$

$B(V_4) = B(20000,\, 0) = 60000$

Así pues, se maximizan las ventas en el vértice $V_3 = (15000,\, 5000)$. Por tanto hay que elaborar 15000 cajas de tipo 1 y 5000 de tipo 2. El valor máximo de las ventas es 65000 €.