Examen de Matemáticas aplicadas a las CCSS II – 2º de Bachillerato

1. Se dispone de tres cajas A, B y C con monedas de 1 euro. Se sabe que en total hay 36 euros. En la caja A hay dos monedas más que en las otras dos juntas. Si se traslada una moneda de la caja B a la caja A, ésta última tendrá el doble de monedas que B. Averigua cuántas monedas había en cada caja.

Puntuación del ejercicio:

- Presentación de las incógnitas y planteamiento del problema: **1 punto**
- Resolución del mismo mediante el método de Gauss: **1 punto**
- Obtención de las soluciones: **0,5 puntos**

2. Las exportaciones, expresadas en toneladas, de una comunidad autónoma a otras tres que limitan con ella, denotadas por A, B y C, vienen expresadas en la matriz E. El precio de la tonelada de cada producto, expresado en miles de euros, durante los años 2005 y 2006 viene dado por la matriz P

$$E = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \text{Trigo} \\ \text{Cebada} \\ \text{Maíz} \end{matrix} \qquad P = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{Trigo} & \text{Cebada} & \text{Maíz} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 10 & 21 & 8 \\ 7 & 5 & 9 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 2005 \\ 2006 \end{matrix}$$

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$. Encontrar una matriz B de la forma $B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$ tal que $B \cdot B^t = A$ **(2 puntos)**

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, resuelve matricialmente la ecuación $ABX - CX = 2C$.

Puntuación del ejercicio:

- Procedimiento para despejar la incógnita *X*: **1 punto**
- Cálculo de la inversa de la matrices correspondientes: **1 punto** (**Consejo:** llama *D* a la matriz $AB - C$)
- Obtención de la matriz *X*: **1 punto**

Soluciones:

1. Llamemos x al número de monedas de la caja A, y al número de monedas de la caja B y z al número de monedas de la caja C. Entonces: $\begin{cases} x+y+z=36 \\ x=y+z+2 \\ x+1=2(y-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=36 \\ x-y-z=2 \\ x-2y=-3 \end{cases}$. Resolvamos el sistema por el método de Gauss: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & -2 & -2 & -34 \\ 0 & -3 & -1 & -39 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2f_3+3f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & -2 & -2 & -34 \\ 0 & 0 & -4 & -24 \end{pmatrix}$

El sistema asociado a esta última matriz es $\begin{cases} x+y+z=36 \\ -2y-2z=-34 \\ \quad -4z=-24 \end{cases}$. De la tercera ecuación se obtiene $z=6$. Sustituyendo en la segunda: $-2y-12=-34 \Rightarrow -2y=-22 \Rightarrow y=11$. Finalmente, sustituyendo en la primera ecuación: $x+11+6=36 \Rightarrow x=19$.

Por tanto en la caja A había 19 monedas, en la caja B 11 monedas y en la caja C 6 monedas.

2. $E=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 10 & 21 & 8 \\ 7 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

a) $P \cdot E=\begin{pmatrix} 10 & 21 & 8 \\ 7 & 5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 173 & 192 & 146 \\ 109 & 83 & 93 \end{pmatrix}$.

El producto $E \cdot P$ no se puede hacer pues el número de columnas de E no coincide con el número de filas de P (E es de orden 3×3 y P es de orden 2×3)

b) $a_{13}=146$. Expresa que en el año 2005 las exportaciones a la comunidad C ascienden en total a 146 miles de euros (146000 €).

$a_{23}=93$. Significa lo mismo que el anterior pero en el año 2006: las exportaciones en este año a la comunidad C ascienden en total a 93000 €.

c) Año 2005: 173 + 192 + 146 = 511 miles de euros (511000 €)

Año 2006: 109 + 83 + 93 = 285 miles de euros (285000 €)

3. $B \cdot B^t=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2+y^2 & yz \\ zy & z^2 \end{pmatrix}$. Como se debe cumplir que $B \cdot B^t=A$, entonces: $\begin{pmatrix} x^2+y^2 & yz \\ zy & z^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$, es decir: $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ yz=-6 \\ z^2=9 \end{cases}$. De la tercera ecuación se deduce que $z=3$. Sustituyendo este valor en la segunda se obtiene $y=-2$. Y, por último sustituyendo el valor de y en la primera obtenemos $x^2+4=4 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$. De este modo la matriz B es $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. $ABX-CX=2C\Rightarrow(AB-C)X=2C$. Llamando $D=AB-C$, la ecuación es $DX=2C$. Multiplicando a la izquierda los dos miembros de la igualdad por la inversa de D se tiene que $D^{-1}DX=D^{-1}(2C)\Rightarrow X=D^{-1}(2C)$.

Hallemos la inversa de la matriz D:

$$D=AB-C=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&1\\2&-1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-1&3\\8&1&3\\2&-1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-2&3\\9&-1&2\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}6&-2&3&1&0&0\\9&-1&2&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[6f_3-f_1]{2f_2-3f_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}6&-2&3&1&0&0\\0&4&-5&-3&2&0\\0&2&-3&-1&0&6\end{array}\right)\xrightarrow{2f_3-f_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}6&-2&3&1&0&0\\0&4&-5&-3&2&0\\0&0&-1&1&-2&12\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_1+3f_3]{f_2-5f_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}6&-2&0&4&-6&36\\0&4&0&-8&12&-60\\0&0&-1&1&-2&12\end{array}\right)\xrightarrow{2f_1+f_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}12&0&0&0&0&12\\0&4&0&-8&12&-60\\0&0&-1&1&-2&12\end{array}\right)\begin{array}{l}f_1/12\\f_2/4\\f_3\cdot(-1)\end{array}\rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\0&1&0&-2&3&-15\\0&0&1&-1&2&-12\end{array}\right).$$

Por tanto la matriz inversa de D es $D^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&3&-15\\-1&2&-12\end{pmatrix}$

Por otro lado $2C=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&4&2\\2&-2&2\end{pmatrix}$

Por tanto: $X=D^{-1}(2C)=\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&3&-15\\-1&2&-12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&4&2\\2&-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&2\\-40&38&-24\\-30&30&-20\end{pmatrix}$