1. Derivar las siguientes funciones y simplificar el resultado en la medida de lo posible.

1) $y=x^3-\frac{1}{2}x^2+2x-12$	2) $y=\left(3x^2-4x+5\right)^2$	3) $y=\left(x^2+3\right)\left(2x^2+x+1\right)$
4) $y=\frac{2x-3}{3x+5}$	5) $y=\sqrt{x^2+5}$	6) $y=\sqrt[3]{x^2-1}$
7) $y=\sqrt[5]{x^2-7x}$	8) $y=\frac{x^2-5x}{x^3-1}$	9) $y=\sqrt{x^2-4x+5}$
10) $y=\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}$	11) $y=\frac{x^3-12x+2}{x^2-7}$	12) $y=\sqrt{\frac{2x+3}{x-2}}$
13) $y=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$	14) $y=\left(\frac{x^3-1}{2x^3+1}\right)^4$	15) $y=(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}$
16) $y=\sqrt{1+\sqrt{x}}$	17) $y=2x^2\sqrt{2-x}$	18) $y=\sqrt{2x}+2\sqrt{x}$
19) $y=x\sqrt{3x^2-1}$	20) $y=\frac{2x}{\sqrt{x-1}}$	21) $y=\sqrt{\ln x}$
22) $y=\ln\sqrt[4]{x^3}$	23) $y=\log\frac{2-x}{2+x}$	24) $y=\log\left(x\sqrt{1+x^2}\right)$
25) $y=\frac{\ln x}{2^x}$	26) $y=\ln\sqrt{x(1-x)}$	27) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$
28) $y=\ln\frac{e^x}{e^x-1}$	29) $y=e^{2x}\ln x^2$	30) $y=\ln\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}$
31) $y=x^3e^{-3x}$	32) $y=\ln\frac{e^x-1}{e^x+1}$	33) $y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
34) $y=\left(x^2-2x+2\right)e^x$	35) $y=x^3\ln x-\frac{x^3}{3}$	36) $y=(a+x)\sqrt{a-x}$
37) $y=\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}$	38) $y=x-2\sqrt{x}+2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$	39) $y=5\left[\ln(ax+b)\right]^3$
40) $y=\sqrt[3]{a+bx^3}$	41) $y=\sqrt{xe^x+x}$	42) $y=x^2\cdot 10^{2x}$
43) $y=(\ln x)^2-\ln(\ln x)$	44) $y=\sqrt{\ln x+1}+\ln\left(\sqrt{x}+1\right)$	45) $y=\sqrt{x^2+1}-\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$
46) $y=x^2e^{5x^2}$	47) $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$	48) $y=\left(1+\sqrt{x-1}\right)^2$
49) $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$	50) $y=\frac{\ln\left(x^2+x\right)}{x^2}$	51) $y=\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$

2. Calcular las ecuaciones de la recta tangente a cada una de las curvas siguientes en el puntos de abscisa que se indica:
   a) $y=8-7x+x^2$ en $x=1$.
   b) $y=x^3-5x^2+4x+2$ en $x=3$.
   c) $y=\dfrac{2x+2}{3x-4}$ en $x=2$.
   d) $y=\sqrt{2x+1}$ en $x=4$.

3. Sabemos que el espacio s recorrido por un móvil depende del tiempo t que lleve moviéndose. Es decir s es una función de t. Además, la velocidad v del móvil es la derivada del espacio respecto del tiempo: $v=s'(t)$. Si la ecuación de la trayectoria de un móvil es

   $$s=3t^2-5t+8$$ (s en metros, t en segundos)

   a) ¿Qué velocidad lleva el móvil en el instante $t=4$ segundos?
   b) ¿En qué momento se para el móvil?

4. Hallar en qué punto la tangente a la curva $y=x^3+5$ es:
   a) Paralela a la recta $12x-y=17$ (dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente).
   b) Perpendicular a la recta $x+3y=2$ (dos rectas $y=m_1x+n_2$, $y=m_2x+n_2$ son perpendiculares si $m_1=-\dfrac{1}{m_2}$).

5. Determina el valor de m con la condición de que la derivada de la función $y=\dfrac{mx+1}{2x+m}$ $\left(x\neq-\dfrac{m}{2}\right)$ sea igual a -1 cuando x vale 1.

6. El número de personas atacadas cada día por una determinada enfermedad viene dada por la función $f(x)=-x^2+40x+84$, donde x representa el número de días transcurridos desde que se descubrió la enfermedad. Calcula:
   a) El número de días que deben transcurrir para que desparezca la enfermedad.
   b) La tasa de propagación de la enfermedad al cabo de 5 días.
   c) El momento en que la enfermedad deja de crecer.
   d) El número de días que tienen que pasar para que la enfermedad se extinga a razón de 32 personas por día.

7. La cotización de las acciones de una determinada sociedad, suponiendo que la Bolsa funciona todos los días de un mes de 30 días, responde a la siguiente ley: $C=x^3-45x^2+243x+30000$
   a) ¿Cuál ha sido la cotización en Bolsa el día 2?
   b) Determina los días en que alcanza las cotizaciones máxima y mínima.
   c) Calcula esas cotizaciones máxima y mínima.

8. De las funciones que se dan a continuación calcula el dominio, los puntos de corte con los ejes, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos. Finalmente, utilizando los datos anteriores, realiza la representación gráfica de la función.

1) $f(x)=\dfrac{3x^2}{2x-1}$	2) $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}$	3) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$	4) $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$
5) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$	6) $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-2}$	7) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$	8) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

Aplicaciones de la derivada a la economía

Aplicaremos la derivada para el cálculo del ingreso, coste y beneficio marginal de un producto. Estos conceptos se definen como sigue:

- ***Ingreso marginal*** es el ingreso adicional que se consigue al vender una unidad más de un producto.
- El coste adicional necesario para producir una unidad más de un producto se conoce como ***coste marginal***.
- ***Beneficio marginal*** es el beneficio que se consigue al producir y vender una unidad más de un producto. El beneficio marginal es la diferencia entre el ingreso y el coste marginal.

Caracterización por derivadas

Si $I(x)$, $C(x)$ y $B(x)$ son las funciones de ingreso, coste y beneficio, respectivamente, que se obtienen por la fabricación y venta de x unidades de un producto, entonces se tiene:

$$\begin{aligned} &\text{Ingreso marginal } = I'(x) \\ &\text{Coste marginal } = C'(x) \\ &\text{Beneficio marginal } = B'(x) = I'(x) - C'(x) \end{aligned}$$

Obviamente, desde el punto de vista económico, interesará aumentar la producción siempre que $I'(x) \geq C'(x)$. El máximo beneficio se obtiene cuando:

$$B'(x) = 0 \Rightarrow I'(x) = B'(x)$$

Ejemplo

Las funciones de ingresos y costes anuales, por la fabricación y venta de q unidades de un determinado producto, vienen dadas por:

$$I(q) = 2.000q - 0,04q^2 \quad ; \quad C(q) = 1.000.000 + 100q + 0,01q^2$$

a) Calcula las funciones de ingresos y de costes marginales.
b) ¿Cuál es el ingreso y coste marginal para $q = 10.000$ y $q = 25.000$? Interpreta el resultado.
c) ¿Hasta cuántas unidades conviene fabricar para que los beneficios sean máximos?

Solución:

a) Hallamos las derivadas de $I(q)$ y $C(q)$:

- Ingreso marginal: $I'(q) = 2.00 - 0,08q$.
- Coste marginal: $C'(q) = 100 + 0,002q$.

b) Si $q = 10.000$, entonces:

$$I'(10.000) = 2.000 - 0,08 \cdot 10.000 = 1.200$$
$$C'(10.000) = 100 + 0,002 \cdot 10.000 = 120$$

La venta de la unidad 10.001 produce un ingreso extra de 1.200 euros. La producción de la unidad 10.001 ocasiona un gasto extra de 120 euros. Por tanto, el beneficio extra es de 1.080 euros.

Si $q = 25.000$, obtenemos:

$$I'(25.000) = 2.000 - 0,08 \cdot 25.000 = 0$$

$$C'(25.000) = 100 + 0,002 \cdot 25.000 = 150$$

Fabricar la unidad 25.001 ocasiona un gasto adicional de 150 euros. Su venta, un ingreso extra de 0 euros. Esto no interesa.

c) Es conveniente fabricar más unidades siempre que $I'(q) \geq C'(q)$; y el máximo se alcanza cuando $I'(q) = C'(q)$. Luego: $2.000 - 0,08q = 100 + 0,002q \Rightarrow 1.900 = 0,082q \Rightarrow q = 23.170,73$.

Por tanto conviene fabricar, redondeando, hasta 23.171 unidades para que los beneficios sean máximos.

Ejercicios

9. El coste de fabricación (en euros) de un determinado producto depende del número q de unidades fabricadas según la función:

$$C(q) = 1.000.000 + 100q + 0,001q^2$$

Se pide:

a) ¿Cuál es el coste medio por unidad $CM(q)$? [**Indicación**: se define el coste medio por unidad como el coste total entre el número de unidades fabricadas]

b) ¿Qué cantidad hay que fabricar para minimizar el coste medio por unidad?

c) ¿Cuál es el coste mínimo promedio por unidad?

10. La demanda del producto de una empresa está en función del precio de venta de ese producto. A un precio p (en euros) la empresa vende $50.000 - 50p$ unidades de ese producto al año. Se pide:

a) La función $I(p)$ que da el ingreso anual de esa empresa.

b) El precio al que debería vender el producto para maximizar el ingreso anual. ¿A cuánto ascendería ese ingreso?

11. La función que da el coste (en euros) de fabricación de q unidades de un producto viene dada por la expresión:

$$C(q) = 5.000 + 500q + 0,02q^2$$

a) Calcula el coste medio por unidad. Si se fabrican 1.000 piezas, ¿cuál será el coste unitario?

b) ¿Qué cantidad hay que fabricar para minimizar el coste medio por unidad?

12. A un precio de p euros se venden: $q = 100.000 - 200p$ unidades de un determinado producto. Por otra parte, el coste de producción de esas q unidades es:

$$C(q) = 150.000 + 100q + 0,03q^2$$

Halla:

a) La función $B(q)$ que da el beneficio de las q unidades producidas y vendidas.

b) El número de unidades que hay que producir para que la ganancia sea máxima.

c) El precio al que deben venderse para ello.

d) Las ganancias para ese precio.

Soluciones:

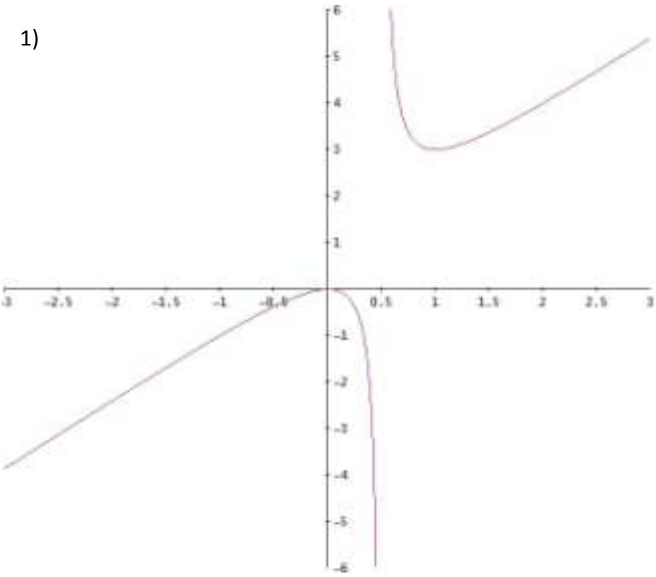
1.

1) $y'=3x-x+2$	2) $y'=2\left(3x^2-4x+5\right)\left(6x-4\right)$	3) $y'=8x^3+3x^2+14x+3$
4) $y'=\dfrac{19}{\left(3x+5\right)^2}$	5) $y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}$	6) $y'=\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}}$
7) $y'=\dfrac{2x-7}{5\sqrt[5]{\left(x^2-7x\right)^4}}$	8) $y'=\dfrac{-x^4+10x^3-2x+5}{\left(x^3-1\right)^2}$	9) $y'=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$
10) $y'=\dfrac{-2}{\left(x-1\right)\sqrt{\left(x+3\right)\left(x-1\right)}}$	11) $y'=\dfrac{x^4-9x^2-4x+84}{\left(x^2-7\right)^2}$	12) $y'=\dfrac{-7}{2\left(x-2\right)\sqrt{\left(2x+3\right)\left(x-2\right)}}$
13) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$	14) $y'=\dfrac{36x^2\left(x^3-1\right)^3}{\left(2x^3+1\right)^5}$	15) $y'=\dfrac{2x^2-4x+3}{\sqrt{x^2-2x+2}}$
16) $y'=\dfrac{1}{4\sqrt{x+x\sqrt{x}}}$	17) $y'=\dfrac{-5x^2+8x}{\sqrt{2-x}}$	18) $y'=\dfrac{\sqrt{2x}+2\sqrt{x}}{2x}$
19) $y'=\dfrac{6x^2-1}{\sqrt{3x^2-1}}$	20) $y'=\dfrac{x-2}{\left(x-1\right)\sqrt{x-1}}$	21) $y'=\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$
22) $y'=\dfrac{3}{4x}$	23) $y'=\dfrac{-4}{\left(2-x\right)\left(2+x\right)\ln 10}$	24) $y'=\dfrac{1+2x^2}{x\left(1+x^2\right)\ln 10}$
25) $y'=\dfrac{1-x\ln x\ln 2}{x\,2^x}$	26) $y'=\dfrac{1-2x}{2x\left(1-x\right)}$	27) $y'=\dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\sqrt{x^2-1}}$
28) $y'=\dfrac{-1}{e^x-1}=\dfrac{1}{1-e^x}$	29) $y'=2e^{2x}\left(\ln x^2+\dfrac{1}{x}\right)$	30) $y'=\dfrac{5x-1}{\left(x-2\right)\left(2x+1\right)}$
31) $y'=3x^2e^{-3x}\left(1-x\right)$	32) $y'=\dfrac{2e^x}{e^{2x}-1}$	33) $y'=\dfrac{-1}{1-x^2}=\dfrac{1}{x^2-1}$
34) $y'=x^2e^x$	35) $y'=3x^2\ln x$	36) $y'=\dfrac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$
37) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$	38) $y'=\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$	39) $y'=\dfrac{15a\left[\ln\left(ax+b\right)\right]^2}{ax+b}$
40) $y'=\dfrac{bx^2}{\sqrt[3]{\left(a+bx^3\right)^2}}$	41) $y'=\dfrac{e^x+xe^x+1}{2\sqrt{xe^x+x}}$	42) $y'=x10^{2x}\left(2+x\ln 10\right)$

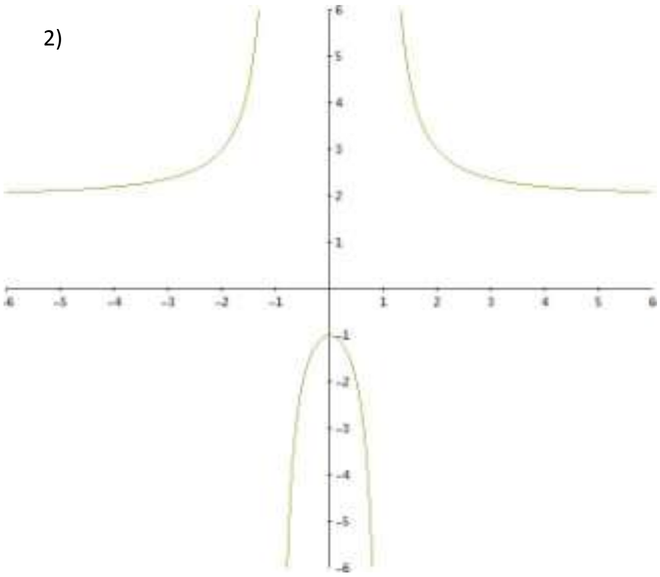
43) $y'=\dfrac{2(\ln x)^2-1}{x\ln x}$	44) $y'=\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x+1}}+\dfrac{1}{2x+2\sqrt{x}}$	45) $y'=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$
46) $y'=2xe^{5x^2}\left(1+5x^2\right)$	47) $y'=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$	48) $y'=\dfrac{1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$
49) $y'=\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$	50) $y'=\dfrac{2x+1-2(x+1)\ln\left(x^2+x\right)}{x^3(x+1)}$	51) $y'=\dfrac{-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$

2. a) $y=-5x+7$; b) $y=x-7$; c) $y=-\dfrac{7}{2}x+10$; d) $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}$
3. a) 19 m/s .
   b) A los $5/6\simeq 0{,}83$ segundos de iniciado el movimiento.
4. a) Hay dos soluciones: en los puntos $(2,\,13)$ y $(-2,-3)$
   b) Hay dos soluciones: en los puntos $(1,\,6)$ y $(-1,\,4)$
5. $m=-1$
6. a) 42 días.
   b) Al cabo de 5 días la enfermedad se propaga a razón de 30 personas por día.
   c) A los 20 días la enfermedad deja de crecer.
   d) A los 36 días la enfermedad disminuye a razón de 32 personas por día.
7. a) 30.314 puntos.
   b) Al tercer día alcanza la cotización máxima y al día que hace el número 27, alcanza la cotización mínima.
   c) En el día 3 la cotización es de 30.351 puntos. En el día 27, de 23.439 puntos.
8. Se da a continuación la representación gráfica de cada una de las funciones. A partir de ellas se pueden deducir todos los elementos que se piden: dominio, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos relativos.

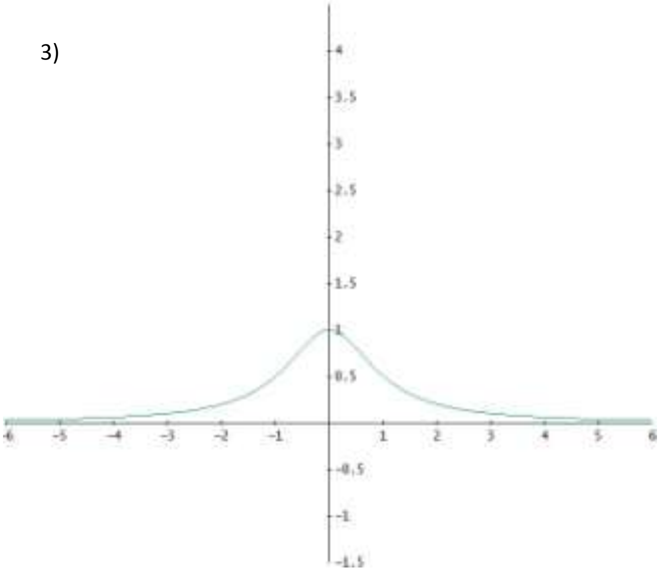
1)



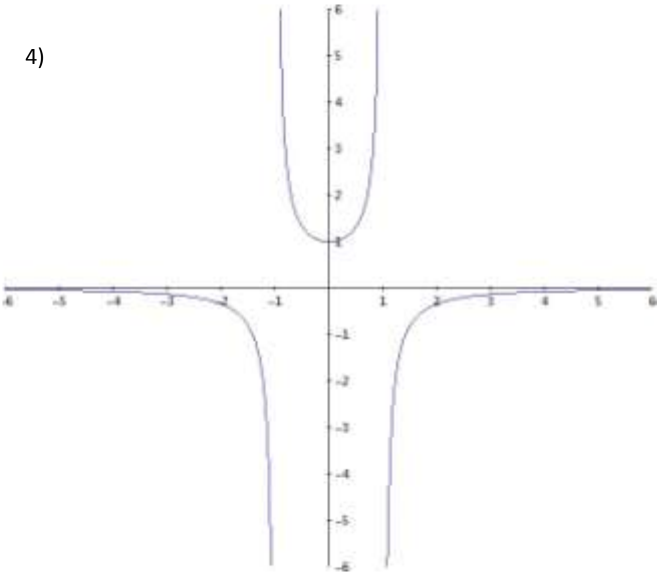
2)



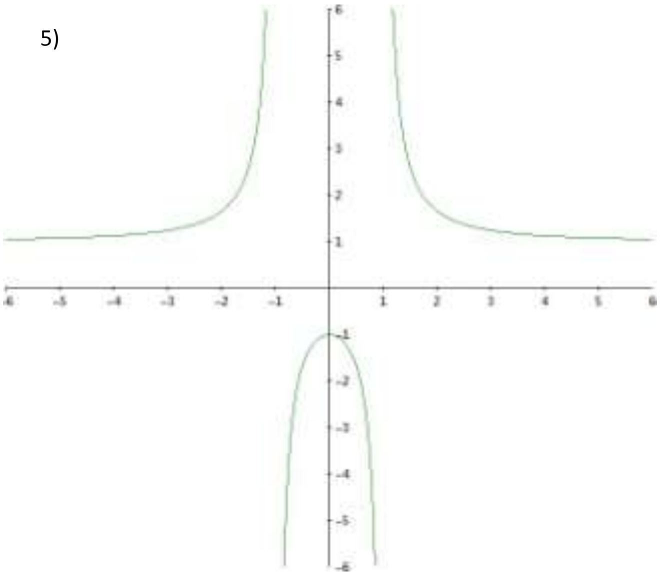
3)



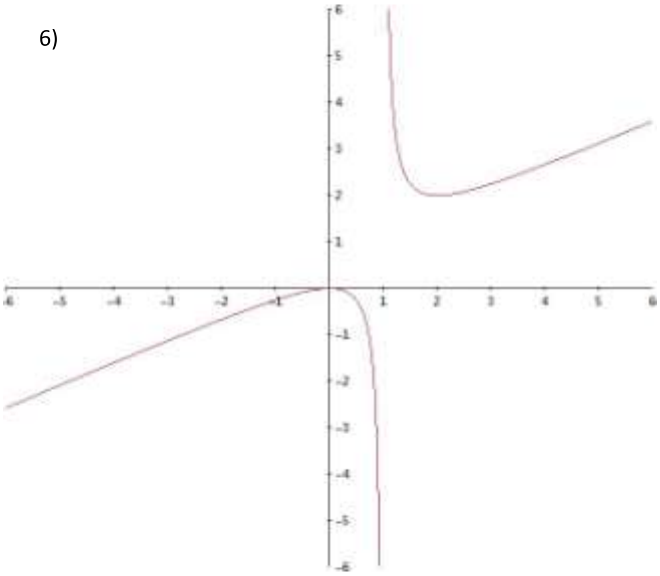
4)



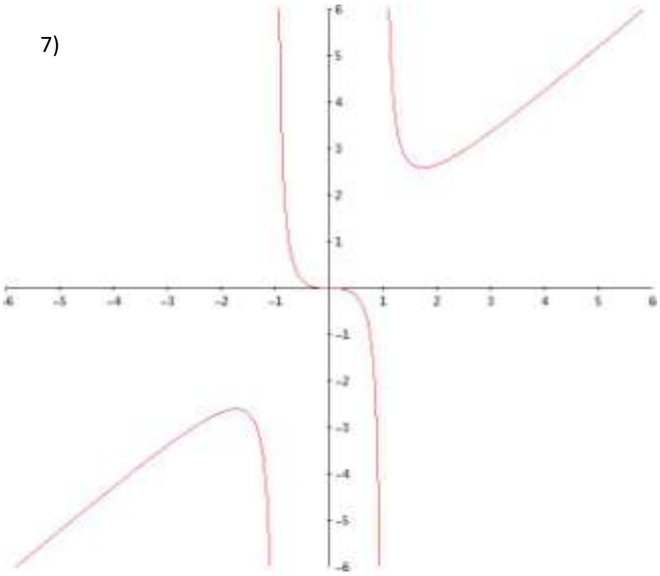
5)



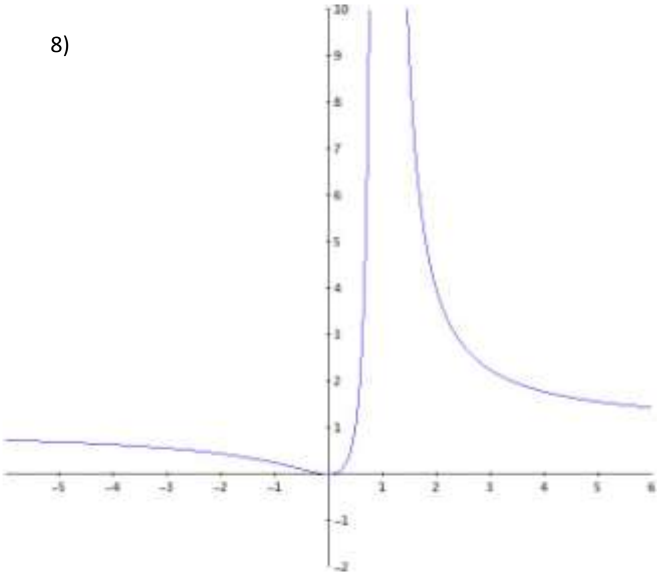
6)



7)



8)



9. a) $CM(q)=\dfrac{1.000.000}{q}+100+0,001q$.

b) Para minimizar el coste medio por unidad habrá que fabricar 31.622,77 unidades.

c) El coste mínimo promedio por unidad será de 163,25 euros.

10. a) $I(p)=50.000p-50p^2$

b) Precio al que debería venderse el producto: 5.000 euros. Ingreso total: 125 millones de euros.

11. a) $CM(q)=\dfrac{5.000}{q}+500+0,02q$. El coste unitario es de 525 euros.

b) Para minimizar el coste medio por unidad hay que fabricar 500 unidades.

12. a) $B(q)=-150.000+400q-0,008q^2$.

b) Número de unidades que hay que producir para que la ganancia sea máxima: 25.000

c) Precio al que deben venderse para ello: 375 euros.

d) Ganancias para ese precio: 4.850.000 euros.