Matemáticas I. 1º de Bachillerato - Suficiencia. 13 de junio de 2011

1. Juan y Ana ven desde las puertas de sus casas una torre de televisión situada entre ellas bajo ángulos de 45 y 60 grados. La distancia entre sus casas es de 126 metros. Halla la altura de la torre. *Consejo*: realiza un dibujo de la situación. Te ayudará a resolver el problema. **(1 punto)**

2. Resuelve la ecuación trigonométrica: $\cos 2x + \cos x = 0$ **(1 punto)**

3. Hallar la ecuación general de la recta r que pasa por el punto $A(5,\ -2)$ y es paralela a la recta $s \equiv 2x - 3y - 5 = 0$. **(1 punto)**

4. Hallar la ecuación general de la recta perpendicular a la recta $x - 2y + 1 = 0$ que pasa por el punto $(2,\ -1)$. **(1 punto)**

5. Hallar el valor de a para que la recta $x - ay + 1 = 0$ sea perpendicular a la recta $(2-a)x - \frac{4}{3}y + 2 = 0$. **(2 puntos)**

6. Dada la función: $f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{si} \quad x < -2 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad -2 \leqslant x < 1 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$

   Estudia razonadamente y, en su caso, explica el tipo de discontinuidad, en los puntos $x = -2$ y $x = 1$. Representa gráficamente la función. **(2 puntos)**

7. Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica en lo posible el resultado:

   a) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ **(1 punto)**

   b) $y = \ln \dfrac{2x-1}{3x-1}$ **(1 punto)**

8. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-4}$, hallar:

   a) El dominio y los puntos de corte con los ejes. **(0,5 puntos)**

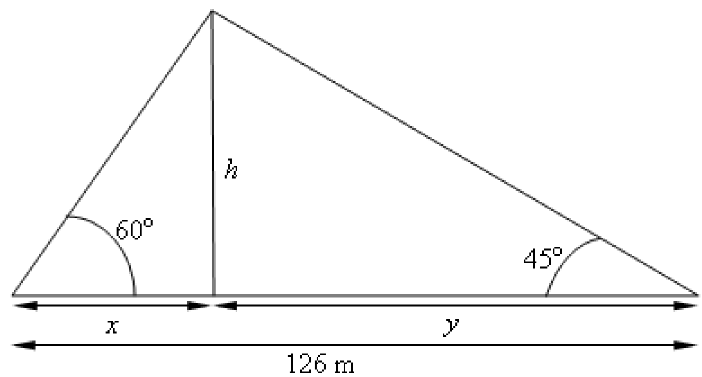
   b) Las asíntotas. **(1 punto)**

   c) Los intervalos donde la función es estrictamente creciente y estrictamente decreciente, así como los máximos y mínimos relativos de la función. **(1,5 puntos)**

   d) Representación gráfica indicando en esta representación los puntos máximos y mínimo obtenidos. **(1 punto)**

Soluciones

1. Para la resolución nos basaremos en el siguiente dibujo:



Como $x + y = 126$, entonces $y = 126 - x$. Ahora podemos plantear el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 60^{\text{o}} = \dfrac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 45^{\text{o}} = \dfrac{h}{126 - x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = \sqrt{3}x \\ h = 126 - x \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3}x = 126 - x \Rightarrow \sqrt{3}x + x = 126 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}73x + x = 126 \Rightarrow 2{,}73x = 126 \Rightarrow x = \frac{126}{2{,}73} \Rightarrow x = 46{,}15 \text{ m}$$

Por tanto $h = 126 - x = 126 - 46{,}15 = 79{,}85$, con lo que la altura de la torre será, aproximadamente, de 79,85 metros.

2. $\cos 2x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + \cos x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \cos x_1 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \\ \cos x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \begin{cases} 60^{\text{o}} + 360^{\text{o}}k \\ 300^{\text{o}} + 360^{\text{o}}k \end{cases} \\ x_2 = 180^{\text{o}} + 360^{\text{o}}k \end{cases}$$

3. Un vector director de s es $\overrightarrow{u} = (-B, A) = (3, 2)$. Entonces la ecuación de la recta es:

$$\frac{x - 5}{3} = \frac{y - (-2)}{2} \Leftrightarrow 2x - 10 = 3y + 6 \Leftrightarrow 2x - 3y - 16 = 0$$

4. Un vector perpendicular a la recta $x - 2y + 1 = 0$ es $\overrightarrow{u} = (A, B) = (1, -2)$. Por tanto la ecuación de la recta perpendicular que pasa por el punto $(2, -1)$ será:

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - (-1)}{-2} \Leftrightarrow -2x + 4 = y + 1 \Leftrightarrow -2x - y + 3 = 0$$

5. Los vectores directores de ambas rectas son, respectivamente, $\overrightarrow{u} = (a, 1)$ y $\overrightarrow{v} = \left(\frac{4}{3}, 2 - a\right)$. Como las rectas han de ser perpendiculares, entonces el producto escalar de ambos vectores debe ser cero, con lo que:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow (a, 1) \cdot \left(\frac{4}{3}, 2 - a\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{4a}{3} + 2 - a = 0 \Leftrightarrow 4a + 6 - 3a = 0 \Leftrightarrow a = -6$$

6. Estudiemos la continuidad en $x = -2$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} (x + 5) = 3 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} (x^2 - 1) = 3 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to -2} f(x) = 3$$

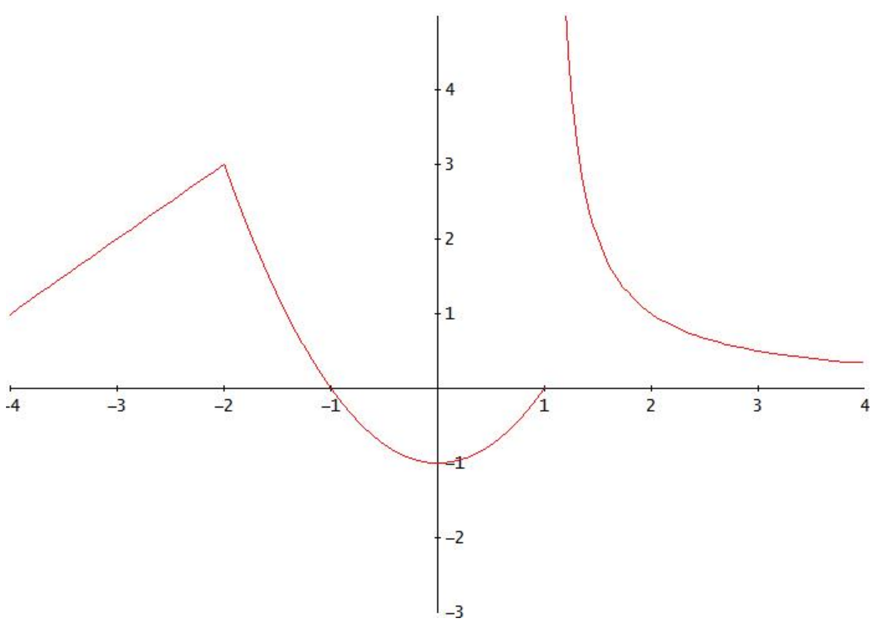
Además $f(-2) = 3$. Por tanto se cumple que $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2) = 3$ y, por tanto, f es continua en $x = -2$.

Estudiemos ahora la continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x - 1} = +\infty \end{cases}$$

Como uno de los límites laterales es infinito, no existe el límite de la función cuando x tiende a 1. Esto quiere decir que f no es continua en el punto $x = 1$. Hay una discontinuidad de salto infinito.

Representación gráfica:



7. a) Lo más fácil es escribir la función como una única potencia de exponente racional:

$$y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=y=\frac{1}{x^{2/3}}=x^{-2/3}=$$

Entonces la derivada es:

$$y'=-\frac{2}{3}x^{-2/3-1}=-\frac{2}{3}x^{-5/3}=-\frac{2}{3}\frac{1}{x^{5/3}}=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}=-\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$$

b) Derivamos utilizando la regla de la cadena:

$$y'=\frac{1}{\frac{2x-1}{3x-1}}\cdot\frac{2(3x-1)-(2x-1)3}{(3x-1)^2}=\frac{3x-1}{2x-1}\cdot\frac{6x-2-6x+3}{(3x-1)^2}=\frac{1}{(2x-1)(3x-1)}$$

8. a) Los números que anulan el denominador son $x=-2$ y $x=2$. Por tanto se tiene que $\operatorname{Dom} f=\mathbb{R}-\{-2,\,2\}$.
Igualando $f(x)$ a 0 se obtiene el punto de corte con el eje X. Para ello basta que el numerador sea cero: $x^2-1=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=-1\\ x_2=1\end{cases}$. Así pues los puntos de corte con el eje X son $(-1,\,0)$ y $(1,\,0)$.
El punto de corte con el eje Y se obtiene haciendo $x=0$. Entonces $y=\frac{1}{4}$, y el punto de corte con el eje Y es $\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

b) Los números que anulaban el denominador ($x=-2$ y $x=2$) son también candidatos a asíntotas verticales. Veamos si lo son:

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2-1}{x^2-4}=\left[\frac{3}{0}\right]=\infty=\begin{cases}+\infty \text{ si } x\to-2^-\\ -\infty \text{ si } x\to-2^+\end{cases}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-1}{x^2-4}=\left[\frac{3}{0}\right]=\infty=\begin{cases}-\infty \text{ si } x\to2^-\\ +\infty \text{ si } x\to2^+\end{cases}$$

De lo anterior se deduce que tanto $x=-2$ como $x=2$ son asíntotas verticales.
Por otro lado: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2-4}=1$. Entonces $y=1$ es una asíntota horizontal.

c) La derivada de la función es:

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-4)-(x^2-1)2x}{(x^2-4)^2}=\frac{2x^3-8x-2x^3+2x}{(x^2-4)^2}=\frac{-6x}{(x^2-4)^2}$$

Entonces:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (posible extremo relativo)}$$

Hagamos una tabla:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
f'	$+$	$+$	$-$	$-$
f	$\uparrow\uparrow$	$\uparrow\uparrow$	$\downarrow\downarrow$	$\downarrow\downarrow$

De la tabla se desprende que f es estrictamente creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y estrictamente decreciente en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$. Además f alcanza un máximo relativo en $x = 0$. Las coordenadas de este máximo son $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$. Para saber la coordenada y basta sustituir la coordenada x en la función inicial (obsérvese que el máximo coincide con el punto de corte con el eje Y).

d) La representación gráfica queda como sigue: