Matemáticas I - 1º de Bachillerato

Primer Examen de la Tercera Evaluación - 10 de mayo de 2011

1. Dada la función cuadrática $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x - 1$:
   - Halla su vértice y los puntos de corte con los ejes. **(1 punto)**
   - Representa gráficamente la función. **(1 punto)**
   - En los mismos ejes de coordenadas, representa gráficamente las funciones $f(x) - 1$ y $f(x+1)$. **(1 punto)**

2. Dada la función hiperbólica $y = \frac{1-6x}{2+3x}$:
   - ¿A qué recta vertical se aproxima indefinidamente la gráfica de la función sin llegar a tocarla? ¿Hacia qué número tienden las imágenes de la función cuando x tiende a $+\infty$? Razona la respuesta. **(0,5 puntos)**
   - Halla los puntos de corte con los ejes. **(0,5 puntos)**
   - Representa gráficamente la función. **(0,5 puntos)**

3. Representa la siguiente función definida por trozos: **(1 punto)**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{si} \quad x < -1 \\ x + 1 & \text{si} \quad -1 \leqslant x <\leqslant 1 \\ -2^x + 3 & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

   Explica razonadamente si la función es o no es continua, indicando, si los hubiera, los puntos donde no sea continua. **(0,5 puntos)**

4. Contesta a las siguientes cuestiones relacionadas con los logaritmos:

   a) ¿En qué base se verifica que el logaritmo de $\frac{6}{\sqrt[3]{6}}$ es $\frac{2}{3}$. **(1 punto)**

   b) Resuelve la siguiente ecuación logarítmica: $\log x^2 - \log\left(\frac{10x+11}{10}\right) = 1$ **(1 punto)**

5. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x+5}$ y $g(x) = x^2 - 1$, hallar:

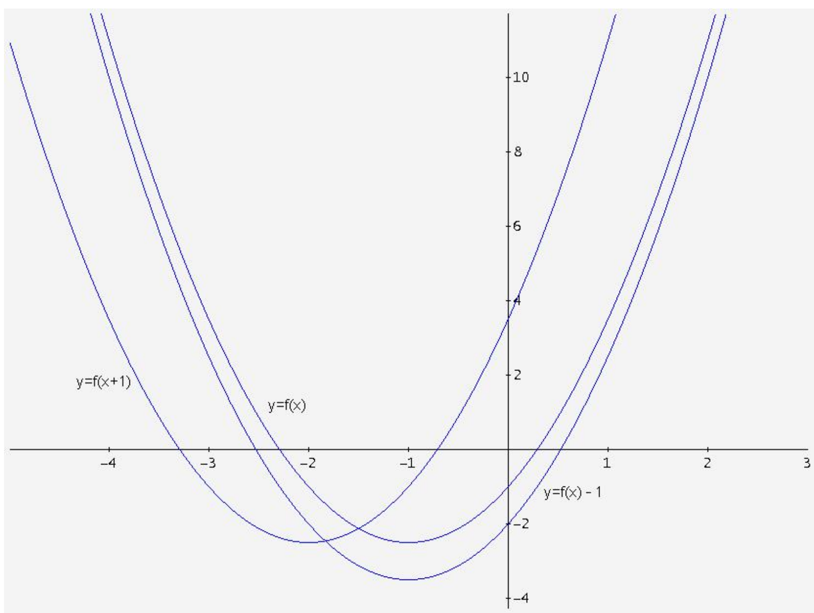
   a) $f \circ g$ **(0,5 puntos)**

   b) $g \circ f$ **(0,5 puntos)**

   c) Inversa de la función g, es decir, la función g^{-1}. Comprueba que, efectivamente, g^{-1} es la inversa de g. **(1 punto)**

Soluciones

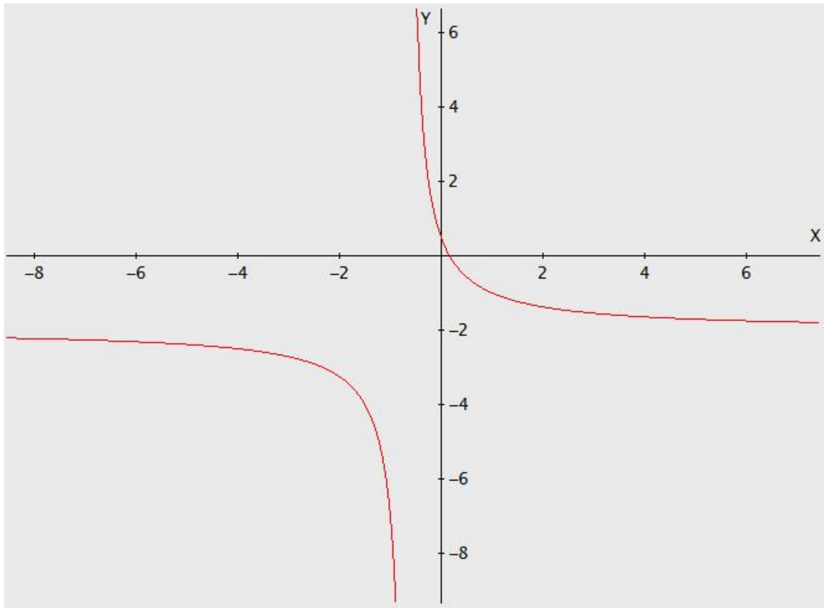
1. Vértice: $V(x,y)$: $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-3}{2\cdot(3/2)} = -1$; $y = f(-1) = \dfrac{3}{2}(-1)^2 + 3(-1) - 1 = -\dfrac{5}{2} \Rightarrow V\left(-1, -\dfrac{5}{2}\right)$
   El punto de corte con el eje Y es $(0,c) = (0,-1)$. Para hallar los puntos de corte con el eje X resolvemos la ecuación $\dfrac{3}{2}x^2 + 3x - 1 = 0$. Sus soluciones son $x_1 = -1 - \dfrac{\sqrt{15}}{3} \approx -2{,}3$, $x_2 = -1 + \dfrac{\sqrt{15}}{3} \approx 0{,}3$. Así pues los puntos de corte con el eje X son: $(-2{,}3, 0)$ y $(0{,}3, 0)$. La representación gráfica de ambas funciones es:

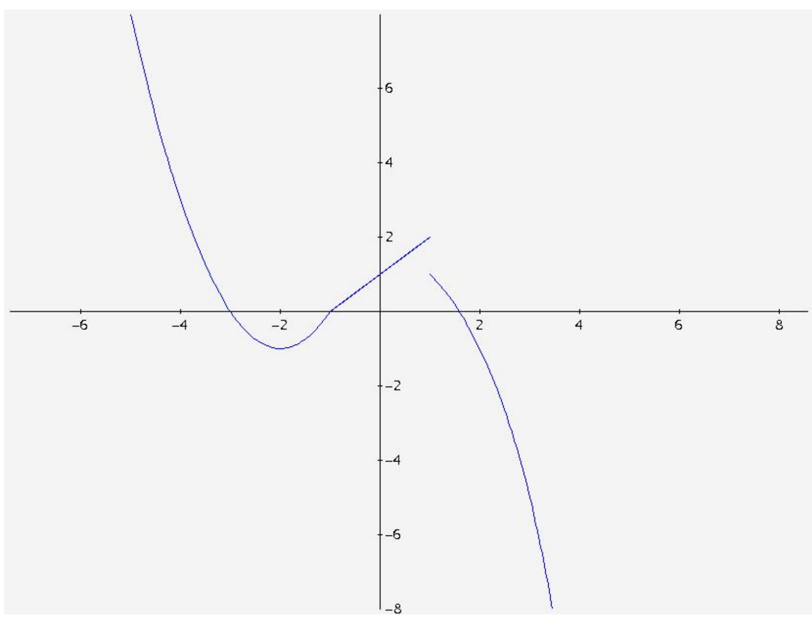
   Obsérvese que también se han dibujado las gráficas de $f(x) - 1$ (la misma que la de la función f desplazada una unidad hacia abajo) y de $f(x+1)$ (la misma que la de f desplazada una unidad hacia la izquierda).

2. La gráfica de la función $y = \dfrac{1-6x}{2+3x}$ se aproxima indefinidamente a la recta vertical $x = \dfrac{-2}{3}$, que es el punto que anula el denominador. Si hacemos x cada vez más grande y positivo se puede apreciar que las imágenes tienden hacia -2, es decir, que la gráfica de la función también se aproxima a la recta horizontal $y = -2$ sin llegar a tocarla.
   Para hallar el punto de corte con el eje X hacemos $y = 0 \Rightarrow \dfrac{1-6x}{2+3x} = 0 \Leftrightarrow 1 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{6}$.
   Para hallar el punto de corte con el eje Y hacemos $x = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}$.
   Así, el punto de corte con el eje X es $\left(\dfrac{1}{6}, 0\right)$ y el punto de corte con el eje Y es $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

La representación gráfica de la función es:



3. Representación gráfica de la función definida por trozos:



La función es continua en todos los puntos de la recta real, salvo en $x = 1$, punto en el que hay que "levantar el lápiz del papel" para seguir dibujando la gráfica de la función.

4. a) $\ln_a \dfrac{6}{\sqrt[3]{6}} = \ln_a \dfrac{6}{6^{1/3}} = \ln_a 6^{2/3}$. Es decir: $\ln_a 6^{2/3} = \dfrac{2}{3}$. Entonces, por la definición de logaritmo $a^{2/3} = 6^{2/3}$. Y esto solamente se cumple, naturalmente, si $a = 6$.

   b) $\log x^2 - \log\left(\dfrac{10x+11}{10}\right) = 1 \Leftrightarrow \log\left(\dfrac{x^2}{\dfrac{10x+11}{10}}\right) = 1 \Leftrightarrow \log\left(\dfrac{10x^2}{10x+11}\right) = \log 10 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \dfrac{10x^2}{10x+11} = 10 \Leftrightarrow 10x^2 = 100x + 110 \Leftrightarrow 10x^2 - 100x - 110 = 0 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow x^2 - 10x - 11 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{10 \pm \sqrt{144}}{2} = \dfrac{10 \pm 12}{2} = \begin{cases} x_1 = 11 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

5. a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = \sqrt{x^2 - 1 + 5} = \sqrt{x^2 + 4}$

   b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x+5}\right) = \left(\sqrt{x+5}\right)^2 - 1 = x + 5 - 1 = x + 4$

   c) $y = x^2 - 1$. Despejemos x en función de y:

$$x^2 = y + 1 \Rightarrow x = \sqrt{y+1}$$

   Entonces la función inversa de g es $g^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$. Comprobémoslo:

   - $(g \circ g^{-1})(x) = g(g^{-1})(x) = g(\sqrt{x+1}) = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 1 = x + 1 - 1 = x$
   - $(g^{-1} \circ g)(x) = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(x^2 - 1) = \left(\sqrt{x^2 - 1 + 1}\right) = \sqrt{x^2} = x$