



**Matemáticas I - 1º de Bachillerato**  
**Recuperación de la Segunda Evaluación - 10 de mayo de 2011**

1. Demuestra la siguiente identidad trigonométrica: **(1 punto)**

$$\frac{2 \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} 2x} = \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{tg} x$$

2. Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica, teniendo en cuenta que *no está permitido usar números decimales, sólo fracciones y radicales con las razones trigonométricas de los ángulos fundamentales*. **(1 punto)**

$$\cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0$$

3. Halla las coordenadas del vector  $\vec{x} = (5, -2)$  respecto de la base formada por los vectores  $\vec{u} = (3, -3)$  y  $\vec{v} = (1, -4)$ . **(1 punto)**

4. Encuentra un vector perpendicular a  $\vec{u} = (4, 5)$  con módulo 1. **(1 punto)**

5. Contesta a los siguientes apartados:

a) Hallar las ecuaciones vectorial, paramétrica, continua, general y afín de la recta  $r$  que pasa por los puntos  $P(-1, 2)$  y  $Q(2, 1)$ . **(1 punto)**

b) Hallar la ecuación continua de la recta paralela a  $r \equiv -2x - y + 2 = 0$  que pasa por el punto  $P(-1, 2)$  **(1 punto)**

c) Hallar la distancia del punto  $P(-1, 3)$  a la recta  $r \equiv 3x - 4y - 5 = 0$ . **(1 punto)**

d) Hallar el ángulo que forman las rectas  $r \equiv y = 2x - 3$  y  $s \equiv 4x + 3y = 0$ . **(1 punto)**

6. Halla la ecuación de una recta  $s$ , paralela a  $r \equiv 3x - 4y + 4 = 0$  que esté a 3 unidades de distancia. **(2 puntos)**



## Soluciones

$$1. \frac{2 \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} 2x} = \frac{2 \operatorname{sen} x}{\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{2 \operatorname{sen} x(1 - \operatorname{tg}^2 x)}{2 \operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x} - \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} - \operatorname{sen} x \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x \operatorname{tg} x = \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{tg} x$$

$$2. \cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 3 \cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - 3 \cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0. \text{ Entonces:}$$

$$\cos x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = 0^\circ + 360^\circ k \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60^\circ + 360^\circ k \\ x = 300^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases}$$

$$3. \text{ Llamemos } (a, b) \text{ a las coordenadas de } \vec{x} \text{ respecto de la base formada por los vectores } \vec{u} \text{ y } \vec{v}. \text{ Entonces: } (5, -2) = a(3, -3) + b(1, -4) = (3a, -3a) + (b, -4b) = (3a + b, -3a - 4b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 5 \\ -3a - 4b = -2 \end{cases} \Rightarrow -3b = 3 \Rightarrow b = -1$$

Sustituyendo por ejemplo en la primera ecuación del sistema inicial,  $a = 2$ . Así pues las coordenadas de  $\vec{x}$  respecto de la base formada por los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son  $(2, -1)$ .

$$4. \text{ Para hallar un vector perpendicular a } \vec{u} \text{ basta intercambiar las coordenadas y cambiar el signo de una de ellas, así no aseguramos de que el producto escalar de ambos sea cero. Así pues un vector perpendicular a } \vec{u} \text{ será } \vec{v} = (-5, 4).$$

Para conseguir uno de módulo 1 dividimos ambas coordenadas entre el módulo del vector, que es:  $|\vec{v}| = \sqrt{(-5)^2 + 4^2} = \sqrt{41}$

$$\text{Por tanto un vector perpendicular a } \vec{u} \text{ de módulo 1 será: } \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left( \frac{-5}{\sqrt{41}}, \frac{4}{\sqrt{41}} \right)$$

$$5. \text{ a) Un vector director de la recta } r \text{ es } \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (3, -1). \text{ Entonces:}$$

- Ecuación vectorial:  $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \vec{v} \Rightarrow \boxed{(x, y) = (-1, 2) + t(3, -1)}$

- Ecuaciones paramétricas:  $\boxed{\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - t \end{cases}}$



- Ecuación continua:  $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1}$
- Ecuación general:  $-x-1 = 3y-6 \Leftrightarrow -x-3y+5 = 0$
- Ecuación afín:  $3y = -x+5 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

b) Al ser paralelas, un vector director de la recta que buscamos es el mismo que el de la recta  $r$ :  $\vec{u} = (1, -2)$ . Así pues la recta que se pide es, en forma continua:  $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-2}$

$$c) d(P, r) = \frac{|-1 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) + (-5)|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-20|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

d) Poniendo  $r$  en forma general,  $r \equiv 2x - y - 3 = 0$ , tenemos que un vector director de  $r$  es  $\vec{u} = (1, 2)$ . Un vector director de la recta  $s$  es  $\vec{v} = (-3, 4)$ . Llamando  $\alpha$  al ángulo que forman las dos rectas:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|1 \cdot (-3) + 2 \cdot 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \alpha = 63,43^\circ$$

6. La recta  $s$  tiene vector director  $\vec{u} = (4, 3)$  (el mismo vector director que  $r$ , pues son paralelas). Esto quiere decir que las dos rectas se diferencian únicamente en el término independiente, es decir, que la ecuación general de la recta  $s$  es de la forma:

$$3x - 4y + C = 0$$

Para hallar el término independiente  $C$ , se toma un punto de  $r$  y se le aplica la fórmula de la distancia a  $s$ .

Un punto de  $r$  es, por ejemplo, para  $x = 0$ ,  $-4y + 4 = 0 \Rightarrow y = 1$ . O sea, que un punto de  $r$  es  $P(0, 1)$ . La distancia de este punto a la recta  $s$  es:

$$d(P, s) = \frac{|3 \cdot 0 + (-4) \cdot 1 + C|}{\sqrt{(3^2) + (-4)^2}} = \frac{|-4 + C|}{5}$$

Entonces:

$$\frac{|-4 + C|}{5} = 3 \Rightarrow \begin{cases} -4 + C = 15 \Rightarrow C = 19 \\ -4 + C = -15 \Rightarrow C = -11 \end{cases}$$

Por tanto hay dos rectas cuya distancia a  $r$  es de tres unidades:

$$s_1 \equiv 3x - 4y + 19 = 0 \quad ; \quad s_2 \equiv 3x - 4y - 11 = 0$$