



## Matemáticas I - 1º de Bachillerato

### Segundo Examen de la Segunda Evaluación - 21 de marzo de 2011

1. Simplifica todo lo posible la siguiente expresión: **(1 punto)**

$$\frac{\cos x + \cos y}{\operatorname{sen}(x + y) \operatorname{sen}(x - y)}$$

2. Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica, teniendo en cuenta que *no está permitido usar números decimales, sólo fracciones y radicales con las razones trigonométricas de los ángulos fundamentales*. **(1 punto)**

$$\operatorname{sen} 2x \cdot \cos x = 6 \operatorname{sen}^3 x$$

3. Halla las coordenadas del vector  $\vec{x} = (1, 4)$  respecto de la base formada por los vectores  $\vec{u} = (3, 1)$  y  $\vec{v} = (2, -3)$ . **(1 punto)**

4. Dados los vectores  $\vec{u} = (2, a)$  y  $\vec{v} = (3, -2)$ , calcula  $a$  para que  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ :  
**(1 punto; 0,5 puntos por apartado)**

- a) Sean perpendiculares.
- b) Formen un ángulo de  $60^\circ$ .

5. Dados los puntos  $P(3, -1)$  y  $Q(-1, 4)$ : **(4 puntos, 1 punto por apartado)**

- a) Hallar las ecuaciones paramétrica, continua, general y afín de la recta  $r$  que pasa por los puntos  $P$  y  $Q$ . ¿Qué ángulo forma  $r$  con el eje  $X$ ?
- b) Hallar la ecuación general de una recta  $s$  que pase por el punto  $R(-1, -1)$  y que sea perpendicular a  $r$ .
- c) Hallar el ángulo que forma la recta  $r$  con la recta  $t \equiv 4x - y - 4 = 0$ .
- d) Calcula la distancia de  $R$  a  $t$ .

6. Calcula la ecuación de la recta  $r$  que, pasando por el punto  $A(2, 3)$ , forma con la recta  $s \equiv 2x + y - 1 = 0$  un ángulo  $\alpha$  de  $45^\circ$ . **(1 punto)**

7. Halla el punto simétrico  $A'$  del punto  $A(3, 2)$ , respecto de la recta  $s \equiv 2x + y - 12 = 0$ .  
**(1 punto)**



## Soluciones

1.

$$\begin{aligned} \frac{\cos x + \cos y}{\operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen}(x-y)} &= \frac{\cos x + \cos y}{(\operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y)(\operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y)} = \\ &= \frac{\cos x + \cos y}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \operatorname{sen}^2 y} = \frac{\cos x + \cos y}{(1 - \cos^2 x) \cos^2 y - \cos^2 x (1 - \cos^2 y)} = \\ &= \frac{\cos x + \cos y}{\cos^2 y - \cos^2 x \cos^2 y - \cos^2 x + \cos^2 x \cos^2 x} = \frac{\cos x + \cos y}{\cos^2 y - \cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x + \cos y}{(\cos y + \cos x)(\cos y - \cos x)} = \frac{1}{\cos y - \cos x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \operatorname{sen} 2x \cdot \cos x = 6 \operatorname{sen}^3 x &\Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos x \cdot \cos x = 6 \operatorname{sen}^3 x \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x = 6 \operatorname{sen}^3 x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x - 6 \operatorname{sen}^3 x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x (2 \cos^2 x - 6 \operatorname{sen}^2 x = 0) \end{aligned}$$

Ahora pueden ocurrir dos cosas:

$$\bullet \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0^\circ + 360^\circ k \\ x = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$$\bullet 2 \cos^2 x - 6 \operatorname{sen}^2 x = 0 \Rightarrow 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) - 6 \operatorname{sen}^2 x = 0 \Rightarrow 2 - 2 \operatorname{sen}^2 x - 6 \operatorname{sen}^2 x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8 \operatorname{sen}^2 x = -2 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 210^\circ + 360^\circ k \\ x = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3. \text{Llamemos } (a, b) \text{ a las coordenadas de } \vec{x} \text{ respecto de la base formada por los vectores } \vec{u} \text{ y } \vec{v}. \\ \text{Entonces: } (1, 4) = a(3, 1) + b(2, -3) = (3a, a) + (2b, -3b) = (3a + 2b, a - 3b) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a + 2b = 1 \\ a - 3b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 2b = 1 \\ -3a + 9b = -12 \end{cases} \Rightarrow 11b = -11 \Rightarrow b = -1.$$

Sustituyendo por ejemplo en la segunda ecuación del sistema inicial,  $a = 1$ . Así pues las coordenadas de  $\vec{x}$  respecto de la base formada por los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son  $(1, -1)$ .



4. a) Para que sean perpendiculares el producto escalar deber ser cero:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (2, a) \cdot (3, -2) = 0 \Leftrightarrow 6 - 2a = 0 \Leftrightarrow 2a = 6 \Leftrightarrow a = 3$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos 60^\circ &= \frac{(2, a) \cdot (3, -2)}{|(2, a)| \cdot |(3, -2)|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{6 - 2a}{\sqrt{4 + a^2} \sqrt{13}} \Leftrightarrow \sqrt{52 + 13a^2} = 12 - 4a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 52 + 13a^2 = 144 - 96a + 16a^2 \Leftrightarrow 3a^2 - 96a + 92 = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado se obtienen dos soluciones para  $a$ :  $a_1 = 31,01$  y  $a_2 = 0,99$

5. a) Un vector director de la recta  $r$  es  $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (-4, 5)$ . Entonces:

Ecuaciones paramétricas: 
$$\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = -1 + 5t \end{cases}$$

Ecuación continua: 
$$\frac{x - 3}{-4} = \frac{y + 1}{5}$$

Ecuación general:  $5x - 15 = -4y - 4 \Leftrightarrow 5x + 4y - 11 = 0$

Ecuación afín:  $4y = -5x + 11 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{4}x + \frac{11}{4}$

La pendiente de la recta es  $m = -\frac{5}{4}$ . Por tanto, el ángulo  $\alpha$  que forma la recta con el eje  $X$  es:  $\text{tg } \alpha = -\frac{5}{4} \Rightarrow \alpha = 128,66^\circ$ .

- b) Un vector  $\vec{u}$  perpendicular a  $r$  es:  $\vec{u} = (5, 4)$ . Por tanto la recta perpendicular  $s$  que pasa por  $R(-1, -1)$  será:  $\frac{x + 1}{5} = \frac{y + 1}{4} \Leftrightarrow 4x + 4 = 5y + 5 \Leftrightarrow 4x - 5y - 1 = 0$

- c) Llamemos  $\alpha$  al ángulo que forma la recta  $r$  con la recta  $t$ . Recordemos que un vector director de  $r$  era  $\vec{v} = (-4, 5)$ . Un vector director de  $t$  es  $\vec{w} = (1, 4)$ . Entonces:

$$\cos \alpha = \frac{(-4, 5) \cdot (1, 4)}{|(-4, 5)| \cdot |(1, 4)|} = \frac{16}{\sqrt{41} \sqrt{17}} \approx 0,606 \Rightarrow \alpha \approx 52,7^\circ$$

$$\text{d) } d(R, t) = \frac{|(-1)4 + (-1)(-1) + (-4)|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = \frac{7}{\sqrt{17}} \approx 1,7$$



6. Llamemos  $m_1$  a la pendiente de  $s$ . La pendiente de  $s$  es  $m_2 = -2$  pues su ecuación afín es  $y = -2x + 1$ . Utilizando la expresión que relaciona el ángulo con las pendientes:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \left| \frac{-2 - m_1}{1 + m_1(-2)} \right| \Leftrightarrow 1 = \left| \frac{-2 - m_1}{1 - 2m_1} \right|. \text{ Ahora hay dos posibilidades:}$$

$$\begin{cases} \frac{-2 - m_1}{1 - 2m_1} = 1 \Rightarrow -2 - m_1 = 1 - 2m_1 \Rightarrow m_1 = 3 \\ \frac{-2 - m_1}{1 - 2m_1} = -1 \Rightarrow -2 - m_1 = -1 + 2m_1 \Rightarrow -3m_1 = 1 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Y también dos rectas que serán solución:

- $r_1$ , que tendrá pendiente igual a 3 y vector director  $(1,3)$ . O sea:  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{3} \Leftrightarrow \Leftrightarrow 3x - 6 = y - 3 \Leftrightarrow \boxed{r_1 \equiv 3x - y - 3 = 0}$

- $r_2$ , que tendrá pendiente igual a  $-\frac{1}{3}$  y vector director  $(1, -\frac{1}{3})$ . Tomaremos un vector proporcional para que sea más fácil obtener la ecuación de la recta:  $(3, -1)$   
 $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{-1} \Leftrightarrow -x + 2 = 3y - 9 \Leftrightarrow \boxed{r_2 \equiv x + 3y - 11 = 0}$

7. Llamemos  $A'(a, b)$  al simétrico de  $A$  respecto de la recta  $s$ .

Calculemos la recta  $r$  perpendicular a  $s$  que pasa por  $A(3,2)$ . Un vector perpendicular a  $s$  es  $\vec{u} = (2,1)$ . Éste será un vector de dirección de  $r$ . Por tanto su ecuación es:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} \Leftrightarrow x - 3 = 2y - 4 \Leftrightarrow \boxed{r \equiv x - 2y + 1 = 0}$$

La solución del sistema  $\begin{cases} 2x + y - 12 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$ , es el punto de corte de las rectas  $r$  y  $s$ . Llamémoslo

$M$ . Resolviendo el sistema se tiene que  $M\left(\frac{23}{5}, \frac{14}{5}\right)$ . Este punto es el punto medio de  $A$  y su simétrico  $A'(a, b)$  respecto de la recta  $s$ . O sea:

$$M\left(\frac{23}{5}, \frac{14}{5}\right) = \left(\frac{3+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{3+a}{2} = \frac{23}{5} \Rightarrow 15 + 5a = 46 \Rightarrow 5a = 31 \Rightarrow a = \frac{31}{5} = 6,2 \\ \frac{2+b}{2} = \frac{14}{5} \Rightarrow 10 + 5b = 28 \Rightarrow 5b = 18 \Rightarrow b = \frac{18}{5} = 3,6 \end{cases}$$

Por tanto el simétrico de  $A(2,3)$  respecto de la recta  $s$  es  $A'\left(\frac{31}{5}, \frac{18}{5}\right) = A'(6,2, 3,6)$