Matemáticas I - 1º de Bachillerato

Recuperación de la Primera Evaluación - 13 de enero de 2011

1. Utiliza el Binomio de Newton para desarrollar la potencia $\left(2x - \dfrac{1}{x^3}\right)^5$ y simplifica en lo posible el resultado. (**1 punto**)

2. Resuelve la siguiente ecuación y el siguiente sistema de ecuaciones:

   a) $\sqrt{1-x} + \sqrt{7-x} = \sqrt{16-2x}$ (**1 punto**)

   b) $\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = \dfrac{10}{9} \\ \dfrac{1}{x} + y = \dfrac{15}{4} \end{cases}$ (**1 punto**)

3. *Para resolver el siguiente problema es obligatorio declarar la o las incógnitas y plantear una ecuación o un sistema de ecuaciones:*
   Un padre reparte entre sus hijos cierta cantidad de dinero. Si hubiera dos hijos menos, a cada uno le corresponderían 13000 euros, y si hubiera cuatro hijos más, a cada uno le tocarían 10000 euros. Determinar el número de hijos y la cantidad repartida. (**1 punto**)

4. Contesta a las siguientes cuestiones:

   a) Utilizando que $\operatorname{tg} 45^{\circ} = 1$, y las relaciones entre ángulos de distintos cuadrantes, halla $\operatorname{tg} 2835^{\circ}$. (**0,5 puntos**)

   b) Sabiendo que el ángulo α se encuentra en el segundo cuadrante y que $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, calcular $\cos \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$ (*hacer el ejercicio con fracciones y dar el resultado en forma de fracción*). (**0,5 puntos**)

   c) Sabiendo que $\cos \alpha = 0,32$ y que α es agudo, halla de manera razonada y sin calcular previamente el ángulo α:

      - $\cos(180^{\circ} - \alpha)$. (**0,5 puntos**)
      - $\operatorname{sen}(180^{\circ} + \alpha)$. (**0,5 puntos**)

5. Desde un punto situado a ras de suelo, los ángulos de elevación que presentan la base y la punta de un mástil de 6 metros de altura, colocado en lo alto de un acantilado, son 38° y 46°. Realiza un dibujo de la situación y halla la altura aproximada del acantilado. (**2 puntos**)

6. Desde el punto A donde me encuentro, deseo hallar la distancia a otro punto B separado del primero por un río que no puedo cruzar. Para ello me voy a otro punto C que está a una distancia del punto A de 50 metros. Con mis aparatos hago las siguientes mediciones: desde A mido el ángulo $\alpha = \widehat{BAC} = 50^{\circ}$ y desde C el ángulo $\beta = \widehat{BCA} = 60^{\circ}$. Realiza un dibujo de la situación, halla la distancia del punto A al punto B y el área del triángulo ABC. (**2 puntos**)

Soluciones

1. $\left(2x-\dfrac{1}{x^3}\right)^5=(2x)^5-5(2x)^4\left(\dfrac{1}{x^3}\right)^1+10(2x)^3\left(\dfrac{1}{x^3}\right)^2-10(2x)^2\left(\dfrac{1}{x^3}\right)^3+5(2x)\left(\dfrac{1}{x^3}\right)^4-\left(\dfrac{1}{x^3}\right)^5=$
$32x^5-5\cdot 16x^4\dfrac{1}{x^3}+10\cdot 8x^3\dfrac{1}{x^6}-10\cdot 4x^2\dfrac{1}{x^9}+5\cdot 2x\dfrac{1}{x^{12}}-\dfrac{1}{x^{15}}=32x^5-80x+\dfrac{80}{x^3}-\dfrac{40}{x^7}+\dfrac{10}{x^{11}}-\dfrac{1}{x^{15}}$

2. a) $\sqrt{1-x}+\sqrt{7-x}=\sqrt{16-2x}\Rightarrow\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{7-x}\right)^2=\left(\sqrt{16-2x}\right)^2\Rightarrow$
$\Rightarrow 1-x+2\sqrt{1-x}\sqrt{7-x}+7-x=16-2x\Rightarrow 2\sqrt{7-8x+x^2}=8\Rightarrow$
$\Rightarrow\sqrt{7-8x+x^2}=4\Rightarrow\left(\sqrt{7-8x+x^2}\right)^2=4^2\Rightarrow 7-8x+x^2=16\Rightarrow x^2-8x-9=0\Rightarrow$

$$x=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 1\cdot(-9)}}{2\cdot 1}=\frac{8\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{8\pm 10}{2}=\begin{cases}x_1=\dfrac{18}{2}\Rightarrow x_1=9\\[2ex] x_2=\dfrac{-2}{2}\Rightarrow x_2=-1\end{cases}$$

La solución $x_1=9$ hay que descartarla pues $\sqrt{1-9}+\sqrt{7-9}=\sqrt{-8}+\sqrt{-2}$, que no son valores reales.

b) $\begin{cases}x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{10}{9}\\[2ex]\dfrac{1}{x}+y=\dfrac{15}{4}\end{cases}$

De la primera ecuación $x=\dfrac{10}{9}-\dfrac{1}{y}\Rightarrow x=\dfrac{10y-9}{9y}\Rightarrow\dfrac{1}{x}=\dfrac{9y}{10y-9}$

Sustituyendo en la segunda ecuación: $\dfrac{9y}{10y-9}+y=\dfrac{15}{4}$

Multiplicando todos los términos por $4(10y-9)$ se eliminan los denominadores y queda una ecuación de segundo grado:
$4\cdot 9y+4\cdot(10y-9)\cdot y=15\cdot(10y-9)\Rightarrow 36y+40y^2-36y=150y-135\Rightarrow 40y^2-150y+135=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow y=\frac{150\pm\sqrt{(-150)^2-4\cdot 40\cdot 135}}{2\cdot 40}=\frac{150\pm\sqrt{900}}{80}=\frac{150\pm 30}{80}=\begin{cases}y_1=\dfrac{180}{80}=\dfrac{9}{4}\\[2ex] y_2=\dfrac{120}{80}=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

Si $y_1=\dfrac{9}{4}\Rightarrow x_1=\dfrac{10\cdot\frac{9}{4}-9}{9\cdot\frac{9}{4}}=\dfrac{\frac{90}{4}-9}{\frac{81}{4}}=\dfrac{\frac{54}{4}}{\frac{81}{4}}=\dfrac{54}{81}=\dfrac{2}{3}$

Si $y_2=\dfrac{3}{2}\Rightarrow x_2=\dfrac{10\cdot\frac{3}{2}-9}{9\cdot\frac{3}{2}}=\dfrac{15-9}{\frac{27}{2}}=\dfrac{12}{27}=\dfrac{4}{9}$

3. Llamemos x al número de hijos e y a la cantidad repartida, en euros. Entonces, teniendo en cuenta que al dividir la cantidad de dinero entre el número de hijos se obtiene la cantidad que le corresponde a cada uno, es posible plantear el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x-2} = 13000 \\ \dfrac{y}{x+4} = 10000 \end{cases}$$

Despejando y de ambas ecuaciones e igualando se obtiene:

$\begin{cases} y = 13000(x-2) \\ y = 10000(x+4) \end{cases} \Rightarrow 13000(x-2) = 10000(x+4) \Rightarrow 13000x - 26000 = 10000x + 40000 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3000x = 66000 \Rightarrow x = \dfrac{66000}{3000} = 22$

$y = 13000(x-2) \Rightarrow y = 13000(22-2) = 13000 \cdot 20 = 260000$

Por tanto se han de repartir 260000 euros entre 22 hijos.

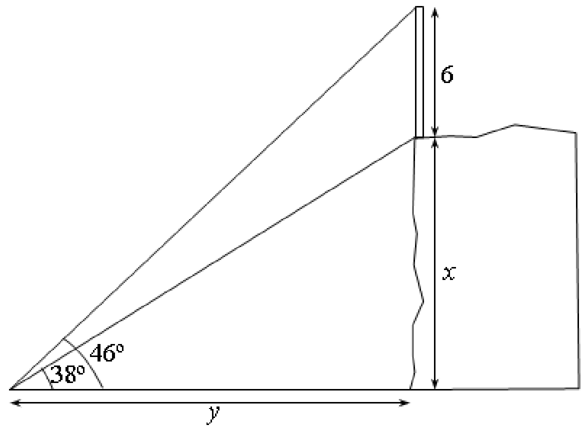
4. a) Al dividir 2835 entre 360 se obtiene 7 de cociente y 315 de resto. Por tanto $2835^{\text{o}} = 360^{\text{o}} \cdot 7 + 315^{\text{o}}$. Entonces $\operatorname{tg} 2835^{\text{o}} = \operatorname{tg} 315^{\text{o}} = -\operatorname{tg} 45^{\text{o}} = -1$.

   b) $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \dfrac{3}{4} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \dfrac{1}{4} \Rightarrow$

   $\Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = -\dfrac{1}{2}$ (se toma la solución negativa porque el ángulo está en el segundo cuadrante). Por otro lado: $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$.

   c)
   - α y $180^{\text{o}} - \alpha$ son suplementarios, por tanto $\cos(180^{\text{o}} - \alpha) = -\cos \alpha = -0,32$.
   - $\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 \Rightarrow 0,32^2 + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 \Rightarrow 0,1024 + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 0,8976 \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = 0,95$ (al ser el ángulo agudo se toma el valor positivo de la raíz). Como α y $180^{\text{o}} + \alpha$ se diferencian en 180^{o}, entonces $\operatorname{sen}(180^{\text{o}} + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha = -0,95$.

5. Hagamos un dibujo con los datos que nos proporciona el enunciado:

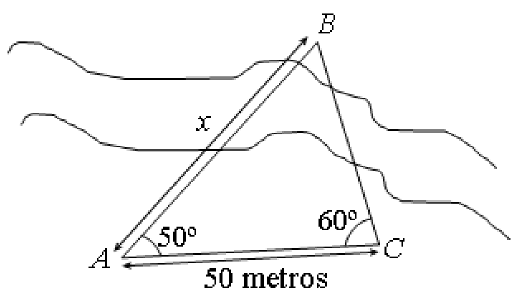


Entonces: $\begin{cases} \operatorname{tg} 46^{\text{o}} = \dfrac{x+6}{y} \\ \operatorname{tg} 38^{\text{o}} = \dfrac{x}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x+6}{\operatorname{tg} 46^{\text{o}}} \\ y = \dfrac{x}{\operatorname{tg} 38^{\text{o}}} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x+6}{\operatorname{tg} 46^{\text{o}}} = \dfrac{x}{\operatorname{tg} 38^{\text{o}}} \Rightarrow \operatorname{tg} 46^{\text{o}} x = \operatorname{tg} 38^{\text{o}}(x+6) \Rightarrow$

$1,036x = 0,781(x+6) \Rightarrow 1,036x = 0,781x + 4,686 \Rightarrow 0,255x = 4,686 \Rightarrow x = \dfrac{4,686}{0,255} \Rightarrow x = 18,38$

Por tanto la altura del acantilado es, aproximadamente, $18,38$ metros.

6. Un dibujo aproximado de la situación puede ser el siguiente (en él se ha llamado x a la distancia de A a B, que es lo que se pide hallar):



Es claro que $\widehat{B} = 180^{\text{o}} - 60^{\text{o}} - 50^{\text{o}} = 70^{\text{o}}$, puesto que los tres ángulos de un triángulo suman 180^{o}. Utilizando ahora el teorema de los senos:

$$\frac{x}{\operatorname{sen} 60^{\text{o}}} = \frac{50}{\operatorname{sen} 70^{\text{o}}} \Rightarrow x = \frac{50 \operatorname{sen} 60^{\text{o}}}{sen 70^{\text{o}}} \Rightarrow x = \frac{50 \cdot 0,87}{0,94} \Rightarrow x = 46,28.$$

Por tanto la distancia del punto A al punto B es de $46,28$ metros.

Para hallar el área del triángulo, obsérvese que conocemos ya dos lados, el $\overline{AB}$ y el $\overline{AC}$ (que miden, respectivamente, $46,28$ y 50 metros). Además conocemos el ángulo que forman ambos lados (50^{o}). Utilizando la fórmula del área del triángulo según la cual ésta es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo que forman, se tiene:

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2} \cdot 46,28 \cdot 50 \cdot \operatorname{sen} 50^{\text{o}} = 886,31 m^2.$$