

**Examen de Matemáticas I – 1º de Bachillerato**

1. Dada la recta  $r \equiv 2x + 4y = 5$ , halla la ecuación de la recta  $s$ , perpendicular a  $r$  que pasa por el punto  $P(1, -2)$ . ¿Qué ángulo forma la recta  $s$  con la recta  $t \equiv y = x + 5$ ? **(2 puntos)**

2. Calcula la mediatriz del segmento de extremos  $A(-2, 3)$  y  $B(4, 1)$ . **(2 puntos)**

*Nota: la mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al mismo que pasa por su punto medio.*

3. Resuelve la siguiente ecuación logarítmica:  $2\log(2x - 2) - \log(x - 1) = 1$  **(1 punto)**

4. Calcula los siguientes límites **(1 punto; 0,5 puntos por apartado)**:

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x^3 + 4x^2 - 7x - 10}$  ;      b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 3x^3 - 2x + 1}{x - 7x^3 - 5x^4 - 2x^2 + 2}$

5. Estudia la continuidad de la función  $f(x) = \begin{cases} \frac{6}{x-4} & \text{si } x < -2 \\ 3 & \text{si } x = -2 \\ x^2 - 5 & \text{si } -2 < x < 4 \\ \frac{4}{x} + 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$  en los puntos  $x = -2$  y  $x = 4$ .

Caso de que no sea continua en alguno de ellos explica el tipo de discontinuidad. **(1 punto)**

6. Dada la función  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x}$ , contesta a los siguientes apartados:

a) Halla los puntos de corte con los ejes. **(0,5 puntos)**

b) Halla las asíntotas verticales y horizontales. **(1 punto)**

c) Realiza una representación gráfica aproximada de la función. **(0,5 puntos)**

7. Calcula la derivada de la función  $f(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{x - 2}$  en el punto  $x = 1$ , así como la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto. **(1 punto)**

① Vector director de  $r$ :  $\vec{u} = (-4, 2)$ . Vector perpendicular a  $\vec{u}$ :  $\vec{v} = (2, 4)$ . Recta que pasa por  $P(1, -2)$  y tiene como vector director  $\vec{v}$  (por tanto perpendicular a  $r$ ):

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} \Rightarrow 4x-4 = 2y+4 \Rightarrow 2y = 4x-8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{s \equiv y = 2x-4}$$
. La pendiente de la recta  $t$  es  $m_1 = 1$  y la de  $s$  es  $m_2 = 2$ . Entonces  $\text{tg } \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| =$ 

$$= \left| \frac{1-2}{1+1 \cdot 2} \right| = \left| \frac{-1}{3} \right| = \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{\alpha = 18'435^\circ}$$
.

②  $\vec{AB} = (6, -2)$ . Vector perpendicular:  $\vec{v} = (2, 6)$ . Punto medio de  $A$  y  $B$ :  $M = \left( \frac{-2+4}{2}, \frac{3+1}{2} \right) = (1, 2)$ . Mediatriz:  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{6} \Rightarrow 6x-6 = 2y-4 \Rightarrow$ 

$$\Rightarrow 6x-2y-2=0 \Rightarrow \underline{3x-y-1=0}$$
.

③  $2 \log(2x-2) - \log(x-1) = 1 \Rightarrow \log(2x-2)^2 - \log(x-1) = 1$ 

$$\Rightarrow \log \frac{(2x-2)^2}{x-1} = 1 \Rightarrow \frac{(2x-2)^2}{x-1} = 10 \Rightarrow 4x^2+4-8x = 10x-10$$

$$\Rightarrow 4x^2-18x+14=0$$
. Resolviendo la ecuación:  $x_1 = \frac{7}{2}$ 

$$\Rightarrow x_2 = 1$$
. La segunda solución hay que descartarla pues el logaritmo de cero no existe.

④  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2-x-3}{x^3+4x^2-7x-10} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x-3)}{(x+1)(x^2+3x-10)} =$ 

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-3}{x^2+3x-10} = \frac{-5}{-12} = \underline{\underline{\frac{5}{12}}}$$
.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4+3x^3-2x+1}{x-7x^3-5x^4-2x^2+2} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \underline{\underline{\frac{-2}{5}}}$  (cuando los grados son iguales se dividen los coeficientes líderes).

⑤  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{6}{x-4} = -1$ 

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2-5) = -1 \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -1 \neq f(-2) = 3 \Rightarrow$$
 $f$  no es continua. Discontinuidad evitable en  $x = -2$ .

$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (x^2-5) = 11$ 

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \left( \frac{4}{x} + 1 \right) = 2 \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \Rightarrow$$

$f$  no es continua en  $x = 4$ . Discontinuidad de salto finito.  
Longitud del salto:  $L = |11-2| = \underline{\underline{9}}$ .

⑥ a) Eje X:  $y=0 \Rightarrow x^3-1=0 \Rightarrow x^3=1 \Rightarrow x=1 : (1,0)$

Eje Y:  $x=0 \Rightarrow y = \frac{-1}{0}$  (que no existe)  $\Rightarrow$  la gráfica de  $f$  no corta al eje Y.

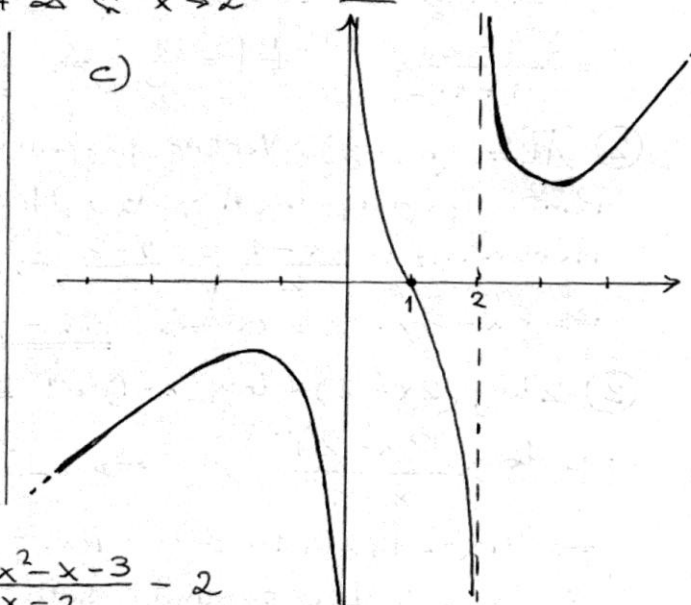
b)  $x^2-2x=0 \Rightarrow x_1=0; x_2=2$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3-1}{x^2-2x} = \frac{-1}{0} = \infty = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 0^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 0^+ \end{cases} \Rightarrow \underline{x=0}$  es asíntota vert.

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-1}{x^2-2x} = \frac{7}{0} = \infty = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 2^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 2^+ \end{cases} \Rightarrow \underline{x=2}$  es asíntota vert.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-1}{x^2-2x} = \infty = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow +\infty \\ -\infty & \text{si } x \rightarrow -\infty \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$  no tiene asíntotas horizontales.



⑦  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-x-3-2}{x-2} =$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-x-3-2x+4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-3x+1}{(x-1)(x-2)} = \left[ \frac{0}{0} \right] =$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\underline{f'(1) = -1}}$

Recta tangente a la gráfica de  $f$  en  $x=1$ :

$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y - 2 = -1(x-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow y - 2 = -x + 1 \Rightarrow \underline{\underline{y = -x + 3}}$