

Examen de Matemáticas I – 1º de Bachillerato

- Halla la ecuación de una recta s paralela a $2x - 3y + 1 = 0$ que corta al eje X en el mismo punto que la recta $r \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y-8}{2}$. **(2 puntos)**
- Encuentra el punto de la recta $r \equiv 4x - 8y + 7 = 0$ que está a la misma distancia de los puntos $A(2, 1)$ y $B(1, -3)$. **(2 puntos)**
- Resuelve la siguiente ecuación logarítmica: $\log(x+3) - \log(x-6) = 1$ **(1 punto)**
- Calcula los siguientes límites **(1 punto; 0,5 puntos por apartado)**:
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 3x^5 - 2x + 1}{x - 7x^3 - 2x^2}$
- Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x-4} & \text{si } x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } -1 < x < 3 \\ \frac{x+3}{x} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ en los puntos $x = -1$ y $x = 3$. Caso de que no sea continua en alguno de ellos explica el tipo de discontinuidad. **(1 punto)**
- Dada la función $f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 2x - 3}$, contesta a los siguientes apartados:
 - Halla los puntos de corte con los ejes. **(0,5 puntos)**
 - Halla las asíntotas verticales y horizontales. **(1 punto)**
 - Realiza una representación gráfica aproximada de la función. **(0,5 puntos)**
- Calcula la derivada de la función $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{3x + 5}$ en el punto $x = -2$, así como la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto. **(1 punto)**

- ① Un vector director de s es $\vec{u} = (3, 2)$ pues s es paralela a $2x - 3y + 1 = 0$.

La recta r corta al eje X en un punto de la forma $(x, 0)$. Hallemos x haciendo $y = 0$: $\frac{x-3}{-1} = \frac{0-8}{2} \Rightarrow \frac{x-3}{-1} = -4$

$\Rightarrow x-3=4 \Rightarrow x=7$. Luego la recta que buscamos también corta al eje X en el punto $(7, 0)$. Así, la recta s

es: $\frac{x-7}{3} = \frac{y-0}{2} \Rightarrow 2x-14=3y \Rightarrow \underline{\underline{2x-3y-14=0}}$

- ② Sea $P(x, y)$ el punto que buscamos. Entonces:

$$d(A, P) = d(B, P) \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2}$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x - 8y - 5 = 0 \Rightarrow 2x + 8y + 5 = 0$$

Como, además, $P \in r: 4x - 8y + 7 = 0$ } Resolviendo el sistema obtenemos el punto buscado: $\underline{\underline{P(-2, -\frac{1}{8})}}$

- ③ $\log(x+3) - \log(x-6) = 1 \Rightarrow \log \frac{x+3}{x-6} = 1 \Rightarrow \frac{x+3}{x-6} = 10$

$$\Rightarrow x+3 = 10x-60 \Rightarrow -9x = -63 \Rightarrow \underline{\underline{x=7}}$$

- ④ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x^2 - 2x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x^2 - 2x + 1} =$

$$= \frac{4}{0} = \infty = \left. \begin{array}{l} +\infty \text{ si } x \rightarrow 1^- \\ +\infty \text{ si } x \rightarrow 1^+ \end{array} \right\} = \underline{\underline{+\infty}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 3x^5 - 2x + 1}{x - 7x^3 - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2/x + 3 - 2/x^4 + 1/x^5}{1/x^4 - 7/x^2 - 2/x^3} = \frac{3}{0} = \underline{\underline{-\infty}}$$

(negativo por el signo de los monomios de mayor grado).

- ⑤ $\underline{\underline{x=-1}}$ $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{5}{x-4} = -1$ } $\Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \Rightarrow$
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{x+1} = 0$

$f(x)$ no es continua en $x=-1$. Discontinuidad de salto finito. Longitud del salto: $L=1$.

$$\underline{\underline{x=3}} \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{x+1} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+3}{x} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2.$$

Además $f(3) = 2$. Entonces $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \Rightarrow f$ es continua en $x=3$.

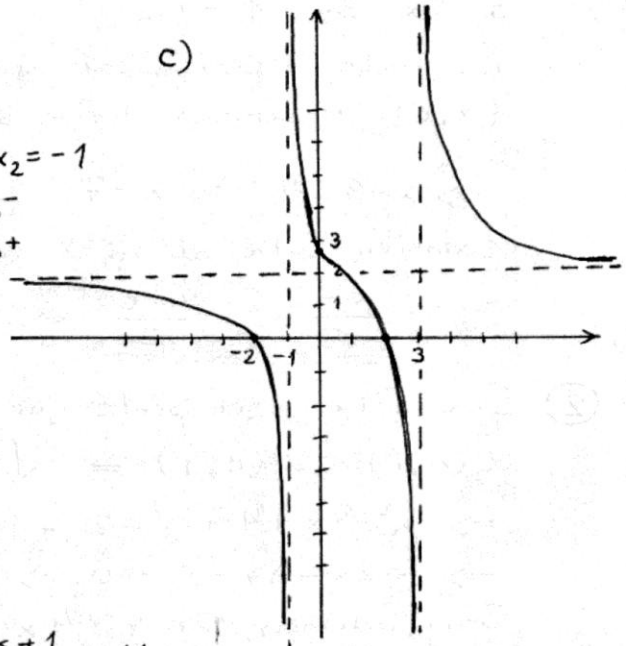
⑥ a) Puntos de corte eje X: $y=0 \Rightarrow 2x^2-8=0 \Rightarrow x^2=4$
 $\Rightarrow x = \pm 2$; $(2,0)$ y $(-2,0)$
 Punto de corte eje Y: $(0, 8/3)$

c)

* b) Verticales: $x^2-2x-3=0 \Rightarrow x_1=3, x_2=-1$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2-8}{x^2-2x-3} = \frac{10}{0} = \infty = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 3^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 3^+ \end{cases}$$

$\Rightarrow \underline{x=3}$ es una asíntota vertical.



Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2-8}{x^2-2x-3} = 2 \Rightarrow \underline{y=2}$$

es una asíntota horizontal

⑦ $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-3x+1}{3x+5} + 11 =$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-3x+1+33x+55}{3x+5} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+30x+56}{(3x+5)(x+2)} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+28)(x+2)}{(3x+5)(x+2)} = \frac{26}{-1} = -26 \Rightarrow \underline{\underline{f'(-2) = -26}}$$

Recta tangente:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \Rightarrow y - f(-2) = f'(-2)(x - (-2))$$

$$\Rightarrow y + 11 = -26(x + 2) \Rightarrow y + 11 = -26x - 52$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y = -26x - 63}}$$

⑥ * Verticales

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2-8}{x^2-2x-3} = \frac{-6}{0} = \infty = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow -1^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow -1^+ \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{\underline{x = -1}}$ es una asíntota vertical.