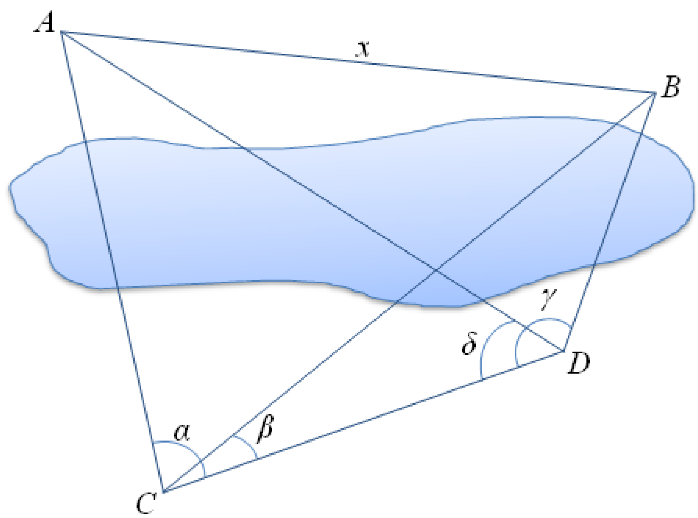
Usos de la trigonometría. Cálculo de alturas y distancias (VIII)

Distancia entre dos puntos inaccesibles

Deseamos calcular la distancia $\overline{AB} = x$ entre dos puntos A y B a los que no tenemos acceso, tal y como se muestra en la figura.



Para ello medimos una base arbitraria $\overline{CD}$, situada en el mismo plano que A y B. Desde C medimos los ángulos $\widehat{ACD} = \alpha$ y $\widehat{BCD} = \beta$. Desde D medimos también los ángulos $\widehat{CDB} = \gamma$ y $\widehat{CDA} = \delta$. Con estos datos también podemos conocer el ángulo $\widehat{CAD} = 180^\circ - \alpha - \delta$ y el ángulo $\widehat{CBD} = 180^\circ - \beta - \gamma$

El método a seguir consiste en calcular previamente $\overline{AC}$ en el triángulo ACD aplicando el teorema de los senos:

$$\frac{\overline{AC}}{\text{sen } \widehat{CDA}} = \frac{\overline{CD}}{\text{sen } \widehat{CAD}} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{\overline{CD} \cdot \text{sen } \delta}{\text{sen}(180^\circ - \alpha - \delta)}$$

A continuación se calcula $\overline{BC}$ en el triángulo BCD aplicando otra vez el teorema de los senos:

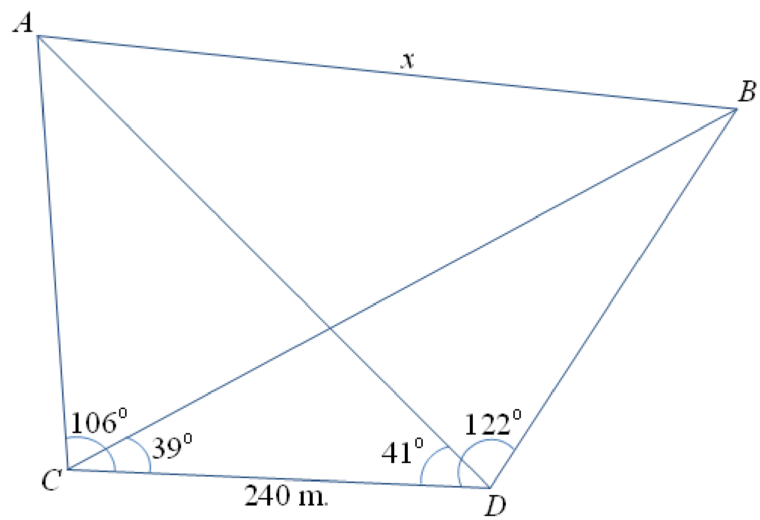
$$\frac{\overline{BC}}{\text{sen } \widehat{BDC}} = \frac{\overline{CD}}{\text{sen } \widehat{CBD}} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{\overline{CD} \cdot \text{sen } \gamma}{\text{sen}(180^\circ - \beta - \gamma)}$$

Por último calculamos $\overline{AB} = x$ en el triángulo ABC aplicando el teorema del coseno:

$$x^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos(\alpha - \beta)$$

Ejemplo.
Para calcular la distancia entre dos puntos inaccesibles A y B, se ha medido una base $\overline{CD}$ de 240 metros, situada en el mismo plano que A y B; también se han medido los ángulos $\widehat{DCA} = 106°$, $\widehat{DCB} = 39°$, $\widehat{CDB} = 122°$ y $\widehat{CDA} = 41°$. Calcular la distancia entre A y B.

Solución.



Llamemos x a la distancia entre A y B. En este caso, según los datos del problema $\alpha = 106°$, $\beta = 39°$, $\gamma = 122°$ y $\delta = 41°$. Calculemos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

$$\overline{AC} = \frac{\overline{CD} \cdot \text{sen } \delta}{\text{sen}(180° - \alpha - \delta)} = \frac{240 \cdot \text{sen } 41°}{\text{sen } 33°} \approxeq 289{,}1$$

$$\overline{BC} = \frac{\overline{CD} \cdot \text{sen } \gamma}{\text{sen}(180° - \beta - \gamma)} = \frac{240 \cdot \text{sen } 122°}{\text{sen } 19°} \approxeq 325{,}16$$

Finalmente calculamos x aplicando el teorema del coseno en el triángulo ABC:

$$x^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos(\alpha - \beta) =$$

$$= 289{,}1^2 + 325{,}16^2 - 2 \cdot 289{,}1 \cdot 625{,}16 \cdot \cos 37° \approxeq 333167{,}23 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{333167{,}23} \Rightarrow x \approxeq 577{,}2$$

Por tanto, la distancia entre A y B es, aproximadamente, 577,2 metros.